ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ · ΣΤΟΙΧΕΙΑ · ΒΙΒΛΙΟ V

ΟΙ ΔΕΚΑΟΚΤΩ ΟΡΙΣΜΟΙ

του Βιβλίου V

Μαθηματική, Φιλολογική και Φιλοσοφική Ανάλυση

Βάσει της έκδοσης:

Ευκλείδους Στοιχεία — Ευαγγέλου Σταμάτη

Συντάχθηκε από τον

Κώστα Λεμονή

με τη συνδρομή Τεχνητής Νοημοσύνης

και κυρίως του Claude (Anthropic)

2025 — 2026

ΣΕΙΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ευκλείδης στην καθημερινή ζωή

Οι Ορισμοί του Βιβλίου V των Στοιχείων

«Δεν υπάρχει βασιλικός δρόμος για τα μαθηματικά.»

— Ευκλείδης, προς τον Πτολεμαίο Α΄

Τα μαθηματικά δεν είναι εφεύρεση των σχολικών βιβλίων.

Είναι η γλώσσα με την οποία η πραγματικότητα μιλά για τον εαυτό της. Κάθε φορά που μοιράζεις ισόποσα κάτι, κάθε φορά που ρυθμίζεις μια δόση φαρμάκου, κάθε φορά που κόβεις ένα ύφασμα στη σωστή αναλογία ή ακούς έναν αρμονικό ήχο — εκεί είναι ο Ευκλείδης. Παρών, σιωπηλός, αδιάψευστος.

— Ο ΑΝΘΡΩΠΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΕΡΓΟ —

Ο Ευκλείδης έζησε στην Αλεξάνδρεια γύρω στο 300 π.Χ. Λίγα γνωρίζουμε για τη ζωή του — αλλά το έργο του μιλά από μόνο του. Τα «Στοιχεία» είναι το δεύτερο βιβλίο με τις περισσότερες εκδόσεις στην ιστορία της ανθρωπότητας, μετά τη Βίβλο. Για είκοσι τρεις αιώνες, κάθε μαθηματικός, μηχανικός, αρχιτέκτονας και φιλόσοφος στη Δύση έμαθε να σκέφτεται μέσα από αυτό το βιβλίο.

Το Βιβλίο V ειδικά είναι ένα αριστούργημα. Γραμμένο στη βάση του έργου του μεγάλου Εύδοξου του Κνίδιου, ορίζει με χειρουργική ακρίβεια τι σημαίνει «αναλογία» — και λύνει ένα πρόβλημα που είχε σοκάρει τον αρχαίο κόσμο: πώς συγκρίνουμε μεγέθη που δεν έχουν κοινό μέτρο, όπως η πλευρά ενός τετραγώνου με τη διαγώνιό του.

— ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΥΤΗ Η ΣΕΙΡΑ —

Κάθε ανάρτηση αυτής της σειράς παρουσιάζει έναν ορισμό του Βιβλίου V — στο αρχαίο κείμενο, στη νεοελληνική του απόδοση, και στη ζωντανή του σχέση με την καθημερινή πραγματικότητα.

Δεν χρειάζεσαι μαθηματικές γνώσεις. Χρειάζεσαι μόνο περιέργεια — την ίδια που είχε ο Ευκλείδης όταν κοίταζε τον κόσμο και αναρωτιόταν: «γιατί τα πράγματα έχουν αυτές τις αναλογίες;»

— ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΥΡΩ ΜΑΣ —

Στην κουζίνα: Όταν διπλασιάζεις μια συνταγή, χρησιμοποιείς αναλογία — ακριβώς τον Ε′ Ορισμό του Ευκλείδη.

Στη μουσική: Η αρμονία των νοτών βασίζεται σε αναλογίες χορδών που πρώτος τυποποίησε η παράδοση που κορυφώθηκε στα Στοιχεία.

Στην αρχιτεκτονική: Ο Παρθενώνας, η Αγία Σοφία, οι γοτθικοί καθεδρικοί — όλοι χτίστηκαν με ευκλείδειες αναλογίες.

Στην ψηφιακή τεχνολογία: Η κρυπτογραφία που προστατεύει τις τραπεζικές συναλλαγές σου στηρίζεται στη θεωρία που ξεκινά εδώ.

Στη φύση: Η διάταξη των σπόρων του ηλίανθου, η διακλάδωση των δέντρων, η αναλογία των οστών του χεριού σου — όλα υπακούουν σε ευκλείδειες αναλογίες.

Ο Ευκλείδης δεν έγραψε για τους μαθηματικούς. Έγραψε για όλους όσους θέλουν να καταλάβουν γιατί ο κόσμος έχει τη μορφή που έχει.

Κατά την έκδοση: Ευάγγελος Σταμάτης, «Ευκλείδου Γεωμετρία — Θεωρία Αριθμών» Σειρά αναρτήσεων: Οι Ορισμοί του Βιβλίου V των Στοιχείων

Α΄ Ορισμός

Περί μέρους και πολλαπλασίου

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Ένα μέγεθος είναι μέρος ενός άλλου μεγέθους (το μικρότερο του μεγαλύτερου), όταν το μικρότερο μετράει ακριβώς το μεγαλύτερο.

— ΑΠΛΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο ορισμός θέτει μια αυστηρή συνθήκη: το μικρότερο μέγεθος Β πρέπει να χωράει μέσα στο μεγαλύτερο Α έναν ακέραιο αριθμό φορών, χωρίς κανένα υπόλοιπο. Αν Β χωράει ακριβώς n φορές στο Α (δηλαδή n × B = A), τότε και μόνο τότε το Β είναι «μέρος» του Α με την ευκλείδεια έννοια.

Η λέξη-κλειδί είναι «καταμετρεῖ» — μετράει ακριβώς, εξαντλεί τελείως. Το 4 είναι μέρος του 12 (3×4=12). Το 5 δεν είναι μέρος του 12 (12 = 2×5 + 2, περισσεύουν 2).

— ΓΙΑ ΟΛΟΥΣ —

Φαντάσου ότι έχεις μια σακούλα με 12 καραμέλες και θέλεις να κάνεις ομάδες των 4. Κάνεις ακριβώς 3 ομάδες — δεν περισσεύει καμία, δεν λείπει καμία. Τέλεια διαίρεση. Αυτό ακριβώς λέει ο Ευκλείδης: το 4 είναι «μέρος» του 12.

Αν όμως προσπαθήσεις με ομάδες των 5, θα περισσέψουν 2 καραμέλες. Εκεί ο Ευκλείδης λέει: όχι, αυτό δεν μετράει. Το 5 δεν είναι «μέρος» του 12 — γιατί δεν χωράει ακριβώς.

Το μεγαλείο του ορισμού: χρησιμοποιεί μια εμπειρία που όλοι γνωρίζουμε — το να μοιράζεις κάτι ισόποσα — και την κάνει θεμέλιο ολόκληρης θεωρίας.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Ο Α΄ Ορισμός είναι η βάση της θεωρίας διαιρετότητας — και επομένως κάθε αλγορίθμου που στηρίζεται σε αυτήν:

Κρυπτογραφία: Η ασφάλεια RSA στηρίζεται στη δυσκολία εύρεσης των «μερών» (παραγόντων) ενός πολύ μεγάλου αριθμού.

Μουσική: Οι ρυθμοί 3/4, 4/4, 6/8 είναι ακριβώς η ευκλείδεια καταμέτρηση: η μονάδα χωράει ακριβώς στο μέτρο.

Ψηφιακές εικόνες: Η ανάλυση 1920×1080 pixels επιλέγεται γιατί και τα δύο νούμερα διαιρούνται ακριβώς με πολλές τιμές — ευκλείδεια «μέρη».

Φαρμακολογία: Η δοσολογία «κάθε 8 ώρες» σημαίνει ότι το 8 είναι μέρος του 24 — η δόση καταμετρεί ακριβώς το εικοσιτετράωρο.

Β′ Ορισμός

Περί πολλαπλασίου

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Το μεγαλύτερο μέγεθος είναι πολλαπλάσιο του μικρότερου, όταν καταμετρείται ακριβώς από αυτό.

— ΑΠΛΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο Β′ Ορισμός είναι ο αναγκαίος αντίποδας του Α′. Αν ο Α′ λέει «το μικρότερο Β είναι μέρος του μεγαλύτερου Α», ο Β′ λέει ακριβώς το ίδιο πράγμα από την άλλη κατεύθυνση: «το μεγαλύτερο Α είναι πολλαπλάσιο του μικρότερου Β».

Η λέξη-κλειδί παραμένει «καταμετρεῖται» — το μικρότερο χωράει μέσα στο μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό φορών, χωρίς κανένα υπόλοιπο. Αν $n \times B = A$, τότε το Α είναι n-πλάσιο του Β. Η σχέση είναι αμοιβαία και συμμετρική — δύο ορισμοί, μία και μόνη πραγματικότητα.

— ΓΙΑ ΟΛΟΥΣ —

Αν ο Α′ Ορισμός λέει «το κομμάτι χωράει μέσα στο όλο», ο Β′ λέει το ίδιο από την άλλη μεριά: «το όλο είναι φτιαγμένο από ακριβή αντίγραφα του κομματιού». Είναι σαν να κοιτάς την ίδια σχέση από δύο διαφορετικά σημεία.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Χρόνος: Μία ώρα είναι ακριβώς 60 λεπτά. Το λεπτό είναι μέρος της ώρας (Α′ Ορισμός) και η ώρα είναι εξηκονταπλάσιο του λεπτού (Β′ Ορισμός). Κάθε ρολόι στον κόσμο στηρίζεται σε αυτή τη σχέση.

Δομή κτιρίου: Ένας τοίχος χτίζεται από τούβλα ίσου μεγέθους. Το τούβλο είναι η μονάδα — ο τοίχος είναι το πολλαπλάσιό της. Ο κτίστης δεν μετράει τον τοίχο σε εκατοστά· τον μετράει σε τούβλα. Ακριβώς η ευκλείδεια καταμέτρηση.

Μουσική: Σε ένα τραγούδι, τέσσερις ισόχρονες μονάδες φτιάχνουν ένα μέτρο. Το μέτρο είναι ακριβώς τετραπλάσιο της μονάδας — χωρίς υπόλοιπο, χωρίς απόκλιση. Κάθε μουσική σύνθεση στηρίζεται σε αυτή την ευκλείδεια ακρίβεια.

Σύστημα μέτρησης: Ένα χιλιόμετρο είναι ακριβώς 1000 μέτρα. Το μέτρο καταμετρεί το χιλιόμετρο χίλιες φορές, χωρίς υπόλοιπο. Ολόκληρο το μετρικό σύστημα — από το χιλιοστό ώς το χιλιόμετρο — είναι αλυσίδα ευκλείδειων πολλαπλασίων.

Γ′ Ορισμός

Περί λόγου

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Λόγος είναι μια ορισμένη κατά μέγεθος σχέση δύο ομογενών μεγεθών.

— ΑΠΛΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο λόγος 3:2 δεν είναι ο αριθμός 1,5. Είναι η σχέση «3 προς 2» — κάτι που υπάρχει μεταξύ δύο μεγεθών, όχι μέσα σε ένα. Τρεις λέξεις ορίζουν όλο τον ορισμό: τα μεγέθη πρέπει να είναι ομογενή (ίδιου γένους), η σχέση τους έχει ποσοτική αναφορά (πηλικότητα), και αυτή η αναφορά είναι σχέση — όχι αριθμός.

— ΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Φαντάσου ένα τετράγωνο με πλευρά 1 μέτρο. Η διαγώνιός του — η γραμμή που ενώνει δύο απέναντι γωνίες — είναι περίπου 1,414 μέτρα. Αυτός ο αριθμός είναι το √2.

Το πρόβλημα: δεν υπάρχει κλάσμα ακεραίων που να ισούται ακριβώς με το √2. Αυτό σήμαινε για τους αρχαίους Έλληνες κάτι σοκαριστικό: η πλευρά και η διαγώνιος δεν έχουν κοινό μέτρο. Δεν υπάρχει καμία μονάδα — όσο μικρή κι αν είναι — που να χωράει ακριβώς και στα δύο χωρίς υπόλοιπο. Τα ονόμασαν ασύμμετρα.

Ο Α′ και Β′ Ορισμός δεν αρκούν για τέτοια μεγέθη. Ο Ευκλείδης όμως δεν λέει «δεν υπάρχει σχέση» — λέει: υπάρχει λόγος, απλώς αυτός ο λόγος δεν είναι αριθμός, είναι σχέση. Σκέψου δύο χάρακες: τον ένα 1 μέτρο, τον άλλο 1,414 μέτρα. Μπορείς να τους συγκρίνεις, βλέπεις ότι ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος. Η σχέση υπάρχει και είναι ορατή — απλώς δεν εκφράζεται με ακέραιους αριθμούς.

Αυτή είναι η μεγαλοφυΐα του Γ′ Ορισμού: αναγνωρίζει ότι η σχέση υπάρχει, ακόμα και όταν δεν μπορεί να μετρηθεί με ακέραιους αριθμούς.

— ΓΙΑ ΟΛΟΥΣ —

Σε μια συνταγή βάζουμε 2 κούπες αλεύρι και 1 κουταλάκι αλάτι. Δεν μετράμε το αλάτι με κούπες ούτε το αλεύρι με κουταλάκια — οι μονάδες είναι διαφορετικές. Παρ' όλα αυτά η σχέση υπάρχει: ξέρουμε ότι το αλεύρι είναι πολύ περισσότερο από το αλάτι, και αν

διπλασιάσεις τη συνταγή, διπλασιάζεις και τα δύο. Αυτή η δυσκολία όμως λύνεται — αν μετατρέψεις και τα δύο σε ml, ο λόγος εκφράζεται αριθμητικά χωρίς πρόβλημα.

Η πλευρά και η διαγώνιος του τετραγώνου πάνε ένα βήμα παραπέρα: εκεί η δυσκολία δεν λύνεται ποτέ. Όσο και να προσπαθήσεις, όσο μικρή μονάδα κι αν διαλέξεις, δεν θα βρεις κλάσμα που να εκφράζει ακριβώς τη σχέση τους. Και όμως η σχέση υπάρχει — την βλέπεις, την αισθάνεσαι, μπορείς να τη συγκρίνεις. Αυτό ακριβώς αναγνωρίζει ο Γ′ Ορισμός: ο λόγος υπάρχει ακόμα και όταν δεν εκφράζεται με αριθμό.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Αρχιτεκτονική: Οι αναλογίες ενός κτιρίου — ύψος προς πλάτος — παραμένουν ίδιες ανεξαρτήτως κλίμακας. Το σχέδιο στο χαρτί και το τελικό κτίριο έχουν τον ίδιο λόγο.

Μαγειρική και φαρμακολογία: Κάθε συνταγή και κάθε δοσολογία είναι λόγος — η σχέση των συστατικών μεταξύ τους, ανεξάρτητη από την απόλυτη ποσότητα.

Χαρτογραφία: Ο χάρτης έχει κλίμακα 1:50.000 — λόγος απόστασης χάρτη προς πραγματική απόσταση. Ομογενή μεγέθη, καθαρή σχέση.

Δ′ Ορισμός

Περί της ύπαρξης λόγου

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

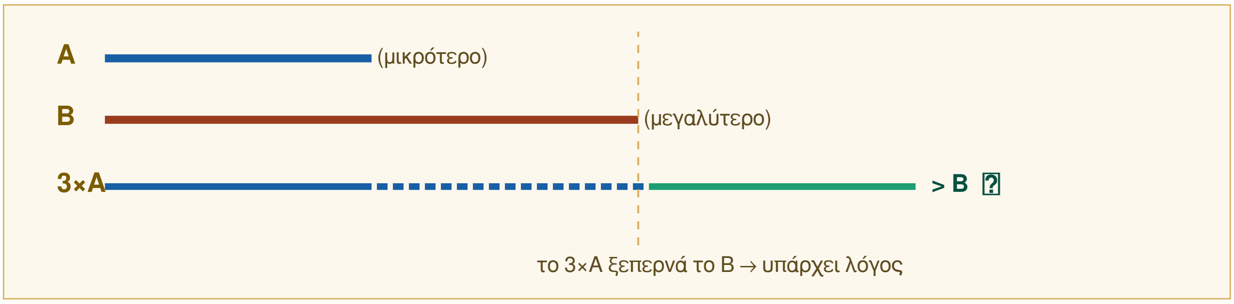
«Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Μεγέθη λέγεται ότι έχουν λόγο μεταξύ τους, όταν μπορούν, πολλαπλασιαζόμενα, να υπερβούν το ένα το άλλο.

— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο Γ′ Ορισμός είπε ότι ο λόγος είναι σχέση δύο ομογενών μεγεθών. Ο Δ′ προσθέτει μια κρίσιμη προϋπόθεση: δεν αρκεί να είναι ομογενή — πρέπει επίσης να μπορούν να αλληλοϋπερβαίνουν. Να υπάρχει δηλαδή κάποιος ακέραιος n τέτοιος ώστε $n \times A$ να ξεπερνά το Β, και κάποιος ακέραιος m τέτοιος ώστε $m \times B$ να ξεπερνά το Α. Μόνο τότε ο λόγος επιτρέπεται να υπάρξει.

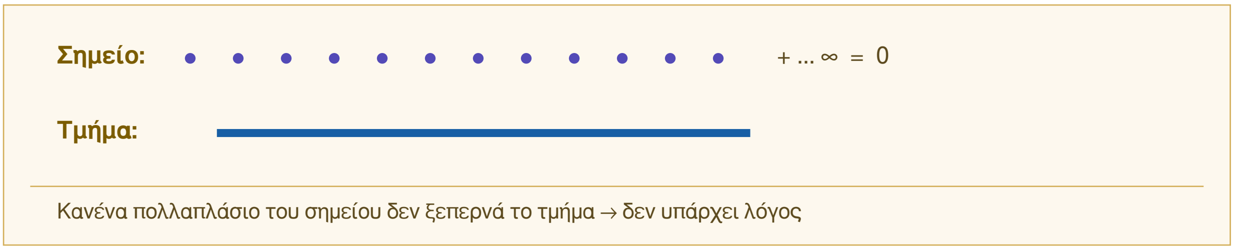


Το 3×Α ξεπερνά το Β — άρα τα Α και Β έχουν λόγο μεταξύ τους.

— ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Φαίνεται αυτονόητο — και όμως δεν είναι. Ο Ευκλείδης δεν επισημαίνει το προφανές. Κάνει φιλοσοφική επιλογή: ορίζει ποιον κόσμο θέλει να περιγράψει. Και αυτός ο κόσμος αποκλείει δύο ακραίες περιπτώσεις.

Η πρώτη είναι το μηδέν. Ένα σημείο δεν έχει μέγεθος. Όσες φορές κι αν το πολλαπλασιάσεις, παραμένει μηδέν — δεν θα ξεπεράσει ποτέ κανένα πραγματικό μέγεθος. Άρα σημείο και ευθύγραμμο τμήμα δεν έχουν λόγο.



Άπειρα σημεία — μηδενικού μεγέθους — δεν σχηματίζουν ποτέ τμήμα.

Η δεύτερη είναι το τόξο και το ευθύγραμμο τμήμα. Και τα δύο μοιάζουν με «μήκη» — αλλά στην αρχαία ελληνική σκέψη η ευθεία και η καμπύλη ανήκουν σε διαφορετικό γένος. Δεν υπάρχει κανένα πολλαπλάσιο ευθύγραμμου τμήματος που να «γίνεται» τόξο — άρα δεν έχουν λόγο.



Ευθεία και καμπύλη — ομογενή φαινομενικά, ετερογενή κατά τον Ευκλείδη.

Η τρίτη είναι το άπειρο. Φαντάσου έναν δρόμο που δεν έχει τέλος. Κάνεις 1 βήμα, 1.000 βήματα, 1.000.000 βήματα — πάντα έχεις μπροστά σου άπειρο δρόμο. Κανένα πεπερασμένο μέγεθος δεν μπορεί να ξεπεράσει το άπειρο — άρα δεν έχουν λόγο.

— ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Αυτό που κάνει τον Δ′ Ορισμό πραγματικά συναρπαστικό είναι ότι η επιλογή του Ευκλείδη δεν είναι η μόνη δυνατή. Στα σύγχρονα μαθηματικά αυτή η αρχή — γνωστή ως αρχή του Αρχιμήδη — δεν αποδεικνύεται. Τίθεται ως αξίωμα. Αυτό σημαίνει ότι οι σύγχρονοι μαθηματικοί αναγνωρίζουν αυτό που ο Ευκλείδης είχε ήδη διαισθανθεί: δεν είναι αυτονόητη αλήθεια — είναι συνειδητή επιλογή.

Υπάρχουν μαθηματικά συστήματα — τα μη-αρχιμήδεια — όπου αυτή η αρχή δεν ισχύει. Εκεί υπάρχουν «άπειρα μικρά» μεγέθη που όσες φορές κι αν πολλαπλασιαστούν δεν φτάνουν ποτέ ένα κανονικό μέγεθος, και «άπειρα μεγάλα» που κανένα κανονικό μέγεθος δεν μπορεί να φτάσει. Δεν είναι φαντασία — χρησιμοποιούνται στη θεωρητική φυσική και στη λογική.

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν βαθιά δυσπιστία προς το άπειρο — το ονόμαζαν άπειρον και το θεωρούσαν ατελές και αόριστο. Ο Αριστοτέλης διέκρινε το «δυνάμει άπειρο» — μπορείς να συνεχίζεις πάντα — από το «ενεργεία άπειρο» — υπάρχει ως ολότητα — και αρνιόταν το δεύτερο. Ο Ευκλείδης κινείται στην ίδια γραμμή: το άπειρο δεν έχει θέση στον κόσμο των

λόγων.



Ο κόσμος του Ευκλείδη: πεπερασμένα μεγέθη μεταξύ μηδενός και απείρου — και τα δύο άκρα αποκλεισμένα.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Μηχανική: Κάθε φορά που ένας μηχανικός λέει «αυτό το υλικό αντέχει n φορές το φορτίο», εφαρμόζει ακριβώς αυτή την αρχή: το φορτίο και η αντοχή είναι πεπερασμένα και συγκρίσιμα μεγέθη — έχουν λόγο.

Οικονομία: Κάθε σύγκριση τιμών, μισθών ή επιτοκίων προϋποθέτει ότι τα μεγέθη που συγκρίνουμε είναι πεπερασμένα και αλληλοϋπερβαίνονται. Αν κάποιο ήταν άπειρο — η σύγκριση θα ήταν αδύνατη.

Φυσική: Στη θεωρία της σχετικότητας η ταχύτητα του φωτός είναι το απόλυτο όριο — κανένα υλικό σώμα δεν μπορεί να την ξεπεράσει. Εκεί ο λόγος «σπάει» — ακριβώς όπως το προβλέπει ο Δ′ Ορισμός.

Ε΄ Ορισμός

Περί ισότητας λόγων — ο ορισμός του Ευδόξου

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Τέσσερα μεγέθη λέγεται ότι είναι στον ίδιο λόγο — το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο — όταν τα ισάκις πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου υπερέχουν ταυτόχρονα, ή είναι ταυτόχρονα ίσα, ή υπολείπονται ταυτόχρονα των ισάκις πολλαπλασίων του δευτέρου και του τετάρτου, για οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό.

— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Οι προηγούμενοι ορισμοί άφησαν ανοιχτό ένα κρίσιμο ερώτημα: πότε δύο λόγοι είναι ίσοι; Για τα σύμμετρα μεγέθη η απάντηση ήταν εύκολη — 3:2 = 6:4 γιατί απλοποιούνται στο ίδιο κλάσμα. Αλλά για τα ασύμμετρα, όπως η πλευρά τετραγώνου και η διαγώνιός της, δεν υπάρχει κλάσμα. Ο Ευδόξος βρήκε τη λύση.

Παίρνουμε οποιονδήποτε ακέραιο m και οποιονδήποτε ακέραιο n — εντελώς ελεύθερα. Σχηματίζουμε τα πολλαπλάσια m×A και m×Γ από τη μια πλευρά, και n×B και n×Δ από την άλλη. Τρεις και μόνο τρεις περιπτώσεις είναι δυνατές: είτε m×A > n×B και ταυτόχρονα m×Γ > n×Δ, είτε m×A = n×B και ταυτόχρονα m×Γ = n×Δ, είτε m×A < n×B και ταυτόχρονα m×Γ < n×Δ. Αν αυτό ισχύει για κάθε δυνατό ζεύγος m και n — τότε και μόνο τότε A:B = Γ:Δ. Η λέξη-κλειδί είναι «ἅμα» — ταυτόχρονα.

Παράδειγμα επιβεβαίωσης: A=3, B=2, Γ=6, Δ=4. Ισχυριζόμαστε ότι 3:2 = 6:4.

	Ζεύγος 1: Α=3, Β=2	Ζεύγος 2: Γ=6, Δ=4		
m=3, n=2:	mA=9 > nB=4	mΓ=18 > nΔ=8	**ταυτ. >**	✓
m=2, n=3:	mA=6 = nB=6	mΓ=12 = nΔ=12	**ταυτ. =**	✓
m=1, n=2:	mA=3 < nB=4	mΓ=6 < nΔ=8	**ταυτ. <**	✓

Σε κάθε ζεύγος m, n η σχέση είναι ταυτόχρονα η ίδια

και για τα δύο ζεύγη μεγεθών.

→ **3:2 = 6:4** ?

Σε κάθε ζεύγος m, n η σχέση είναι ταυτόχρονα η ίδια — άρα 3:2 = 6:4.

Παράδειγμα κατάρριψης: Α=3, Β=2, Γ=4, Δ=3. Ισχυριζόμαστε ότι 3:2 = 4:3.

	Ζεύγος 1: Α=3, Β=2	Ζεύγος 2: Γ=4, Δ=3		
m=3, n=2:	mA=9 > nB=4	mΓ=12 > nΔ=6	ταυτ. > ...	
m=2, n=3:	mA=6 = nB=6	mΓ=8 < nΔ=9	**= αλλά <**	✗

Ένα μόνο ζεύγος m, n αρκεί για να καταρρίψει την ισότητα.

Δεν χρειάζεται να ελέγξεις όλα τα ζεύγη —

αρκεί να βρεις ένα που αποτυγχάνει.

→ **3:2 ≠ 4:3** ?

Ένα μόνο ζεύγος m=2, n=3 αρκεί για να καταρρίψει την ισότητα — άρα 3:2 ≠ 4:3.

Εδώ φαίνεται η αυστηρότητα του κριτηρίου: άπειρες επιβεβαιώσεις χρειάζονται για να αποδείξεις την ισότητα — μία μόνο αντίφαση αρκεί για να την καταρρίψεις. Αυτή η ασυμμετρία είναι η ίδια λογική που διέπει τη σύγχρονη επιστημονική μέθοδο: ένα πείραμα δεν αποδεικνύει μια θεωρία, αλλά ένα μόνο αντίθετο αποτέλεσμα αρκεί για να την ανατρέψει.

— ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Φαντάσου ότι θέλεις να αποδείξεις ότι δύο άνθρωποι έχουν τον ίδιο χαρακτήρα. Δεν αρκεί να τους δεις σε μια κατάσταση — πρέπει να τους παρατηρήσεις σε κάθε δυνατή κατάσταση. Αν σε κάθε περίσταση αντιδρούν με τον ίδιο τρόπο — τότε και μόνο τότε έχουν τον ίδιο χαρακτήρα. Αυτό κάνει ο Ε′ Ορισμός για τους λόγους: δεν ρωτά τι είναι ο λόγος — ρωτά πώς συμπεριφέρεται σε κάθε δυνατή σύγκριση.

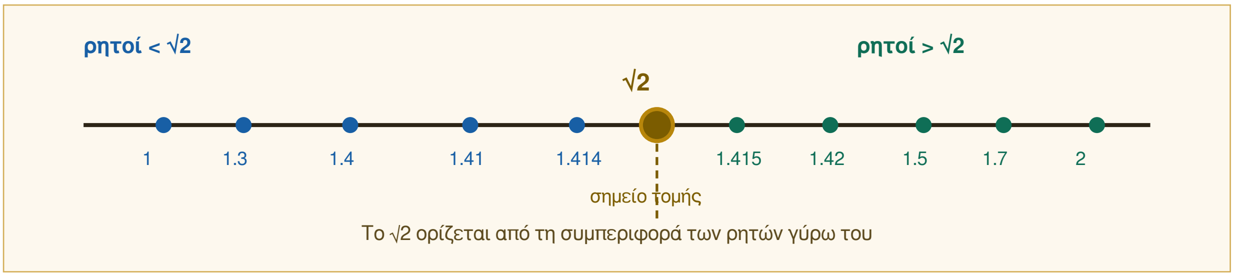
Και εδώ είναι η σύνδεση με τους προηγούμενους ορισμούς που είχαμε αφήσει ανοιχτή. Ο Γ′ Ορισμός δήλωσε ότι ο λόγος υπάρχει ως σχέση — χωρίς να πει τι είναι. Ο Δ′ έθεσε τις προϋποθέσεις για να επιτρέπεται ο λόγος. Τώρα ο Ε′ ολοκληρώνει: δεν χρειάζεται να ξέρουμε τι είναι ο λόγος — αρκεί να ξέρουμε πώς συγκρίνεται. Ο Γ′ Ορισμός είναι η

ερώτηση. Ο Ε′ Ορισμός είναι η απάντηση.

— ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

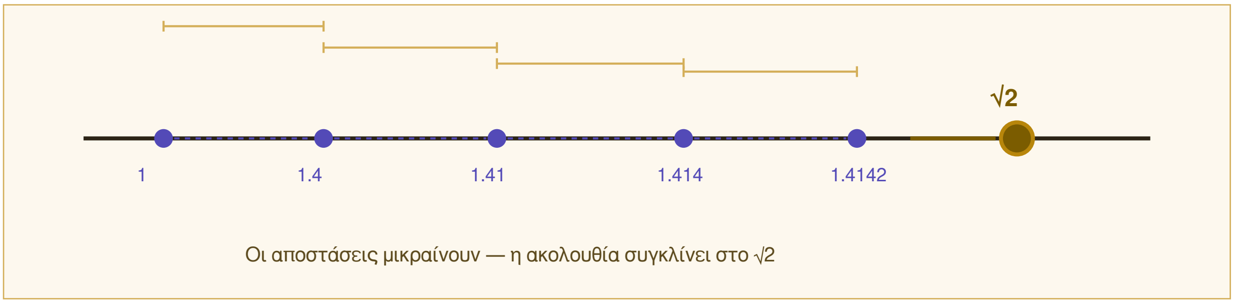
Ο Ε′ Ορισμός κάνει κάτι φιλοσοφικά επαναστατικό: αντικαθιστά την «ουσία» με τη «συμπεριφορά». Δεν ορίζει τι είναι ο λόγος — ορίζει πώς λειτουργεί. Αυτή η ιδέα επανεμφανίζεται δύο φορές στην ιστορία των μαθηματικών με εντυπωσιακή ακρίβεια.

Ο Dedekind το 1872 ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς ως τομές: κάθε πραγματικός αριθμός χωρίζει τους ρητούς σε δύο ομάδες — αυτούς που είναι μικρότεροί του και αυτούς που είναι μεγαλύτεροί του. Το √2 δεν χρειάζεται να «υπάρχει» ως αριθμός — αρκεί να ορίζουμε πώς συμπεριφέρεται απέναντι σε κάθε ρητό. Ακριβώς η κίνηση του Ευδόξου.



Τομή Dedekind: το √2 ορίζεται από το πώς χωρίζει τους ρητούς — όχι από το τι είναι.

Ο Cauchy — και αργότερα ο Cantor — ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς ως ακολουθίες ρητών που πλησιάζουν όλο και περισσότερο μεταξύ τους. Το √2 είναι η ακολουθία 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142... — όχι ένας αριθμός που «υπάρχει» κάπου, αλλά μια διαδικασία που συγκλίνει με συγκεκριμένο τρόπο. Πάλι η ίδια ιδέα: η συμπεριφορά ορίζει την ύπαρξη.



Ακολουθία Cauchy: οι ρητοί 1, 1.4, 1.41, 1.414... πλησιάζουν το √2 — ορίζοντάς το με τη συμπεριφορά τους.

Είκοσι τρεις αιώνες χωρίζουν τον Ευδόξο από τον Dedekind και τον Cauchy — αλλά η φιλοσοφική κίνηση είναι κατά λέξη η ίδια.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Αρχιτεκτονική: Δύο κτίρια έχουν τον ίδιο λόγο αναλογιών αν για κάθε δυνατή σύγκριση τα αντίστοιχα μεγέθη συμπεριφέρονται ταυτόχρονα — ανεξαρτήτως κλίμακας.

Ψηφιακή τεχνολογία: Ο αλγόριθμος που ελέγχει αν δύο εικόνες έχουν την ίδια αναλογία διαστάσεων εφαρμόζει ουσιαστικά αυτή τη λογική — συγκρίνει συμπεριφορά, όχι

αριθμούς.

Κβαντομηχανική: Ένα σωματίδιο δεν έχει «ουσία» πριν το παρατηρήσουμε — έχει μια περιγραφή του πώς θα συμπεριφερθεί σε κάθε δυνατή μέτρηση. Ο Ευδόξος και ο Heisenberg, απέχοντας 23 αιώνες, κάνουν κατά βάθος την ίδια φιλοσοφική κίνηση.

ΣΤ′ Ορισμός

Περί αναλογίας

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω»

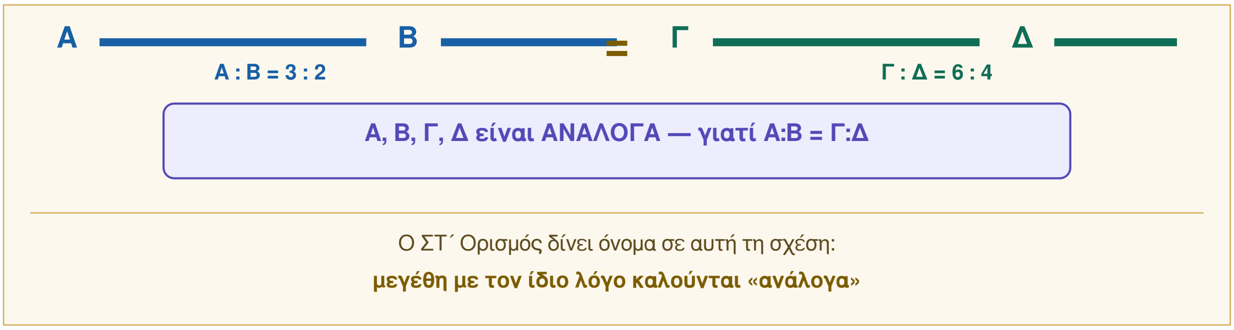
— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Τα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο ας καλούνται ανάλογα.

— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο ΣΤ′ Ορισμός είναι ο πιο σύντομος του Βιβλίου V — μία μόνο πρόταση. Και όμως είναι θεμελιακός: δίνει επίσημο όνομα σε αυτό που ο Ε′ Ορισμός μόλις όρισε. Όταν δύο ζεύγη μεγεθών πληρούν το κριτήριο του Ε′ Ορισμού — δηλαδή συμπεριφέρονται ταυτόχρονα το ίδιο για κάθε δυνατό πολλαπλάσιο — τότε τα μεγέθη αυτά καλούνται ανάλογα.

Στην ελληνική επιστημονική παράδοση η ονοματοδοσία δεν είναι τυπική διαδικασία — είναι πράξη με φιλοσοφικό βάρος. Σημαίνει ότι η έννοια έχει πλέον αυτόνομη υπόσταση και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ελεύθερα στις αποδείξεις που ακολουθούν. Από εδώ και στο εξής στα Στοιχεία, όταν λέγεται «ανάλογον» — ο αναγνώστης ξέρει ακριβώς τι σημαίνει.



Τα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ είναι ανάλογα γιατί Α:Β = Γ:Δ — πληρούν το κριτήριο του Ε΄ Ορισμού.

— ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

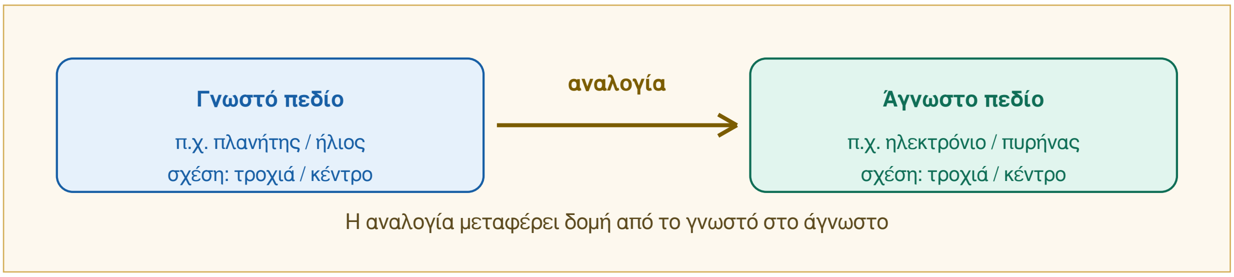
«Ανάλογον» σημαίνει κυριολεκτικά κατά λόγον — σύμφωνα με λόγο. Και εδώ η ελληνική γλώσσα κρύβει κάτι βαθύ: η ίδια λέξη «λόγος» σημαίνει και την αριθμητική σχέση και τη σκέψη, τον νου, το νόημα. Το «ανάλογον» συνδέει εξαρχής τα μαθηματικά με τη σκέψη.

Ο Πλάτων χρησιμοποίησε την αναλογία ως φιλοσοφικό εργαλείο πολύ πριν ο Ευκλείδης την ορίσει αυστηρά. Στην Πολιτεία γράφει ότι η σχέση του ήλιου προς τον ορατό κόσμο είναι ανάλογη με τη σχέση της ιδέας του Αγαθού προς τον νοητό κόσμο. Δεν λέει ότι είναι ίδια — λέει ότι έχουν τον ίδιο λόγο. Ακριβώς η ευκλείδεια αναλογία εφαρμοσμένη στη φιλοσοφία.

Ο Αριστοτέλης πήγε ακόμα παραπέρα. Στα Ηθικά Νικομάχεια ορίζει τη δικαιοσύνη ως αναλογία — η δίκαιη κατανομή δεν είναι ίση μερίδα για όλους, αλλά μερίδα ανάλογη με την αξία του καθενός. Η αναλογία γίνεται θεμέλιο της ηθικής.

— ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Η αναλογία δεν είναι μόνο μαθηματική σχέση — είναι ο τρόπος με τον οποίο η ανθρώπινη σκέψη μεταφέρει γνώση από το γνωστό στο άγνωστο. Όταν ο φυσικός λέει «το ηλεκτρόνιο περιφέρεται γύρω από τον πυρήνα σαν πλανήτης γύρω από τον ήλιο» — χρησιμοποιεί αναλογία για να κάνει κατανοητό κάτι αόρατο μέσω κάποιου ορατού.



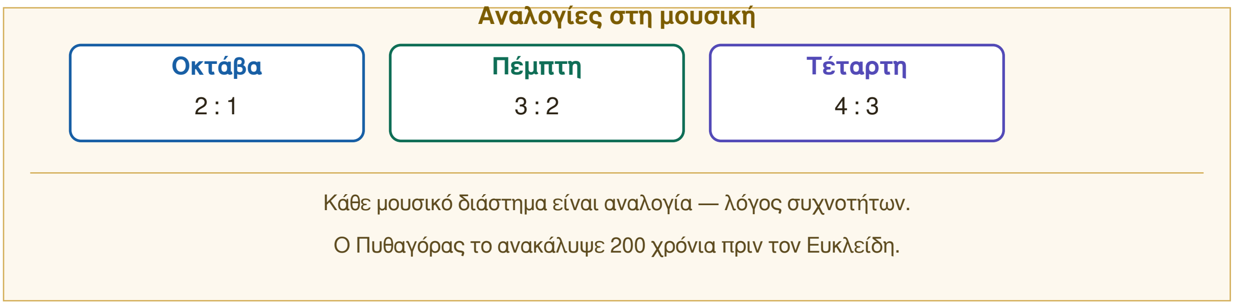
Η αναλογία μεταφέρει δομή από το γνωστό στο άγνωστο — θεμελιακό εργαλείο της επιστημονικής σκέψης.

Στη γλωσσολογία η αναλογία είναι ο μηχανισμός με τον οποίο μια γλώσσα δημιουργεί νέους τύπους βάσει υπαρχόντων προτύπων. Το παιδί που λέει «έτρεξα, έπαιξα, έκλαιξα» αντί για «έκλαψα» — κάνει αναλογία. Εφαρμόζει τον ίδιο λόγο που παρατήρησε αλλού.

Και υπάρχει κάτι ακόμα βαθύτερο: η αναλογία προϋποθέτει ότι ο κόσμος έχει δομή — ότι οι σχέσεις που παρατηρούμε σε ένα πεδίο επαναλαμβάνονται σε άλλα. Αυτή η πεποίθηση είναι η βαθύτερη παραδοχή της επιστήμης. Χωρίς αναλογία δεν θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε τίποτα — κάθε επιστημονικός νόμος είναι μια αναλογία.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Αρχιτεκτονική: Ο Βιτρούβιος έκτισε ολόκληρη τη θεωρία του πάνω στην αναλογία. Ένα κτίριο είναι αρμονικό όταν οι σχέσεις των μερών του μεταξύ τους και προς το όλο είναι ανάλογες — δηλαδή όταν πληρούν ακριβώς το κριτήριο του Ε΄ Ορισμού.



Τα τρία βασικά μουσικά διαστήματα ως αναλογίες — ο Πυθαγόρας τα ανακάλυψε δύο αιώνες πριν τον Ευκλείδη.

Επιστήμη: Ο νόμος της βαρύτητας λέει ότι η σχέση δύναμης-απόστασης είναι η ίδια παντού στο σύμπαν. Αυτό είναι ευκλείδεια αναλογία σε κοσμική κλίμακα.

Γλώσσα: Κάθε μεταφορά, κάθε παρομοίωση, κάθε αναλογικός συλλογισμός στηρίζεται στην ίδια αρχή: υπάρχει ο ίδιος λόγος — η ίδια δομική σχέση — σε δύο διαφορετικά πεδία.

Ζʹ Ορισμός

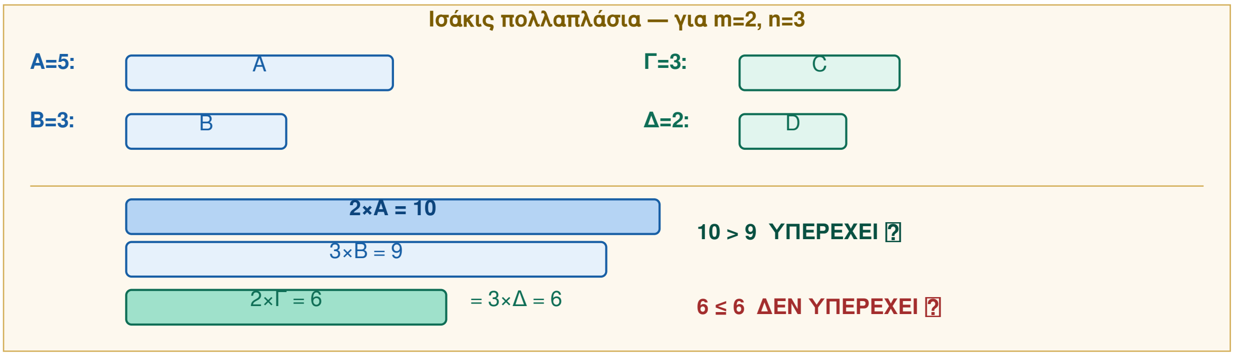
Περί μείζονος λόγου

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.»

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Ἰσάκις πολλαπλάσια» — ισάκις: εξίσου, τον ίδιο αριθμό φορών. Παίρνουμε τον ίδιο ακέραιο m για το πρώτο και τρίτο μέγεθος, και τον ίδιο n για το δεύτερο και τέταρτο. «Ὑπερέχῃ» — ξεπερνά, χωρίς διαίρεση, χωρίς κλάσμα. «Μὴ ὑπερέχῃ» — δεν υπερέχει: είτε ίσο είτε μικρότερο — μία λέξη για δύο περιπτώσεις. «Λέγεται» — ο Ευκλείδης δεν λέει "είναι" αλλά "λέγεται ότι είναι". Ο λόγος είναι σχέση, όχι αριθμός.



Για m=2, n=3: το 2×A=10 υπερέχει του 3×B=9, αλλά το 2×Γ=6 δεν υπερέχει του 3×Δ=6. Άρα 5:3 > 3:2.

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

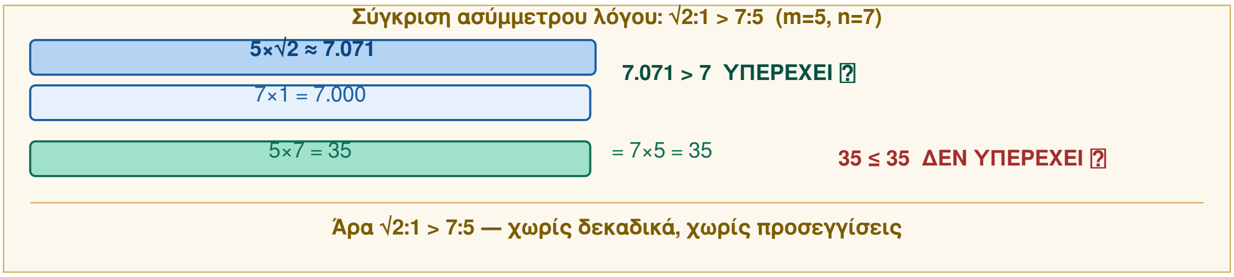
Όταν, από τα ισάκις πολλαπλάσια, το πολλαπλάσιο του πρώτου υπερέχει του πολλαπλασίου του δευτέρου, αλλά το πολλαπλάσιο του τρίτου δεν υπερέχει του πολλαπλασίου του τετάρτου, τότε λέγεται ότι το πρώτο έχει μεγαλύτερο λόγο προς το δεύτερο παρά το τρίτο προς το τέταρτο.

— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο Ζʹ Ορισμός είναι ο φυσικός αντίποδας του Εʹ. Αν ο Εʹ ορίζει πότε δύο λόγοι είναι ίσοι — απαιτώντας να ισχύει η ίδια σχέση για κάθε ζεύγος m, n — ο Ζʹ ορίζει πότε ένας λόγος είναι μεγαλύτερος: αρκεί ένα μόνο ζεύγος m, n όπου τα δύο ζεύγη συμπεριφέρονται διαφορετικά.

Εδώ φαίνεται και η θεμελιακή διαφορά λόγου και κλάσματος. Το κλάσμα είναι αριθμητική τιμή που προκύπτει από διαίρεση — χρειάζεται μέτρηση. Ο λόγος στον Ευκλείδη είναι

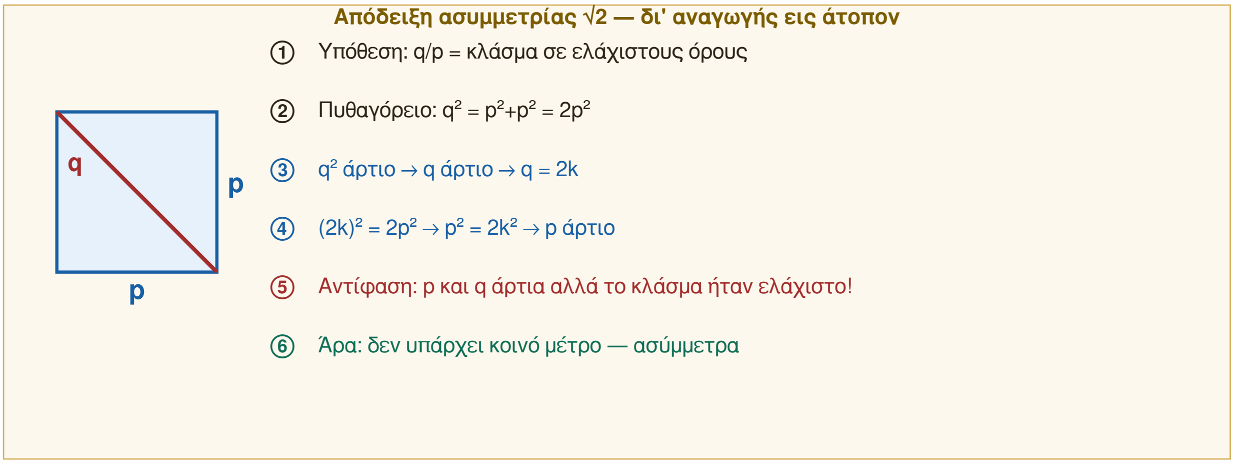
καθαρή σχέση που συγκρίνεται μέσω πολλαπλασίων, χωρίς μέτρηση και χωρίς αριθμούς. Αυτό επέτρεψε να καλύψει και τα ασύμμετρα μεγέθη — για τα οποία δεν υπάρχει κλάσμα.



Το √2:1 > 7:5 αποδεδειγμένο χωρίς δεκαδικά — μόνο με πολλαπλάσια.

— ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — Η ΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΛΟΓΩΝ —

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι τα πάντα είναι αριθμοί — ότι κάθε μέγεθος εκφράζεται ως λόγος ακεραίων. Η ανακάλυψη ότι η διαγώνιος τετραγώνου δεν έχει κοινό μέτρο με την πλευρά του δεν ήταν απλώς μαθηματικό πρόβλημα — ήταν κοσμοθεωρητική κρίση. Πώς μπορεί ο κόσμος να είναι αρμονικός αν περιέχει άλογα μεγέθη;



Η κλασική απόδειξη: αν p και q ήταν σύμμετρα, τότε και τα δύο θα ήταν άρτια — αντίφαση.

— ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — ΘΕΟΔΩΡΟΣ, ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ, ΠΛΑΤΩΝ —

Ο τρόπος που η αρχαία σκέψη αντιμετώπισε αυτή την κρίση αποκαλύπτεται στον διάλογο Θεαίτητος του Πλάτωνα.

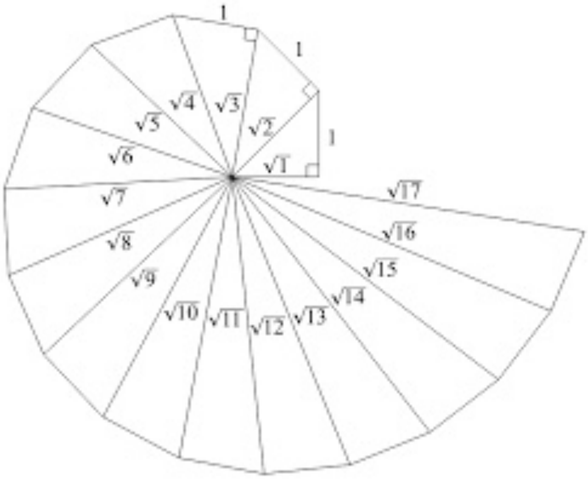
«Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ· καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.»

«Ο Θεόδωρος μας έδειχνε κάτι σχετικά με τις δυνάμεις — τις πλευρές τετραγώνων — αποδεικνύοντας ότι η τρίποδη και η πεντάποδη δεν είναι σύμμετρες κατά μήκος με την ποδιαία (τη μονάδα). Και προχωρώντας μία-μία την καθεμιά μέχρι τη δεκαεπτάποδη· εκεί όμως κάπως μπερδεύτηκε.»

Σημείωση λεξιλογίου: «δυνάμεις» στην αρχαία μαθηματική γλώσσα σημαίνει πλευρές τετραγώνων — η «τρίποδος» είναι η √3, η «πεντάποδος» η √5. «Ποδιαία» είναι η μονάδα

μήκους. Το ρήμα «ἐνέσχετο» δεν σημαίνει απέτυχε — σημαίνει «πιάστηκε», «μπλέχτηκε».

Ο Θεόδωρος χρησιμοποιούσε γεωμετρικές κατασκευές — πιθανότατα τη Σπειροειδή που φέρει το όνομά του. Ξεκινά με ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και 1 — υποτείνουσα √2. Στη συνέχεια αυτή η υποτείνουσα γίνεται η μία κάθετη του επόμενου τριγώνου, ενώ η άλλη κάθετη παραμένει πάντα 1. Η νέα υποτείνουσα γίνεται √3. Και συνεχίζει: √4, √5... √17. Στο √17 η σπείρα αρχίζει να «μπλέκεται» — εκεί «ἐνέσχετο».



Σπειροειδής Θεοδώρου — κάθε τρίγωνο έχει μία κάθετη πλευρά = 1 (σταθερή). Η σπείρα σταματά στο √17. Πηγή: Wikimedia Commons (CC BY-SA 3.0)

Ο Θεόδωρος αντιμετώπισε την κρίση στρατιωτικά — μία-μία μάχες, περίπτωση προς περίπτωση. Ο Θεαίτητος την υπέρβη στρατηγικά — δημιούργησε γενική θεωρία. Το απόσπασμα που ακολουθεί δείχνει αυτή την υπέρβαση (Θεαίτητος 147e–148b):

«Ἐπεὶ οὖν ἄπειροι τὸ πλῆθος ἐφαίνοντο αἱ δυνάμεις, ἐπέβαλε ἡμῖν μίαν ἐπ᾽ αὐτὰς ἰδέαν περιλαβεῖν, ὑφ᾽ ᾗ πάσας ἐροῦμεν... Ὡρίσαμεν οὖν πάσας μὲν τὰς γραμμὰς τὰς τετραγωνιζούσας τοὺς τετραγώνους ἀριθμοὺς μήκη καλεῖν, τὰς δὲ τετραγωνιζούσας τοὺς ἑτερομήκεις δυνάμεις...»

«Επειδή οι δυνάμεις φαίνονταν άπειρες, μας ήρθε η ιδέα να τις συγκεντρώσουμε όλες κάτω από μία ενιαία ιδέα... Ορίσαμε: τις γραμμές που τετραγωνίζουν τετράγωνους αριθμούς να τις λέμε μήκη· και τις άλλες — δυνάμεις.»

Αυτή είναι η κλασική πλατωνική κίνηση: από τα πολλά στο Ένα, από το αισθητό στο νοητό. Ο Θεόδωρος μένει στα πολλά (μεμονωμένα παραδείγματα). Ο Θεαίτητος ανεβαίνει στο Ένα (ενιαία θεωρία). Ο κόσμος παραμένει αρμονικός όχι επειδή όλα είναι ακέραιοι, αλλά επειδή όλα υπάγονται σε λογικές σχέσεις — σε λόγους.

Και ο Πλάτων στον Τίμαιο ανυψώνει αυτή την ιδέα σε κοσμολογική αρχή:

«Κάλλιστος δὲ τῶν δεσμῶν ὁ ἀνὰ λόγον... ὅταν οὖν τῶν τριῶν ἀριθμῶν ἢ ὄγκων ἢ δυνάμεων ὁ μέσος πρὸς τὸν ἔσχατον οὕτως ἔχῃ ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον... πάνθ᾽ οὕτως ἐξ ἀνάγκης ταὐτὰ ἔσται.»

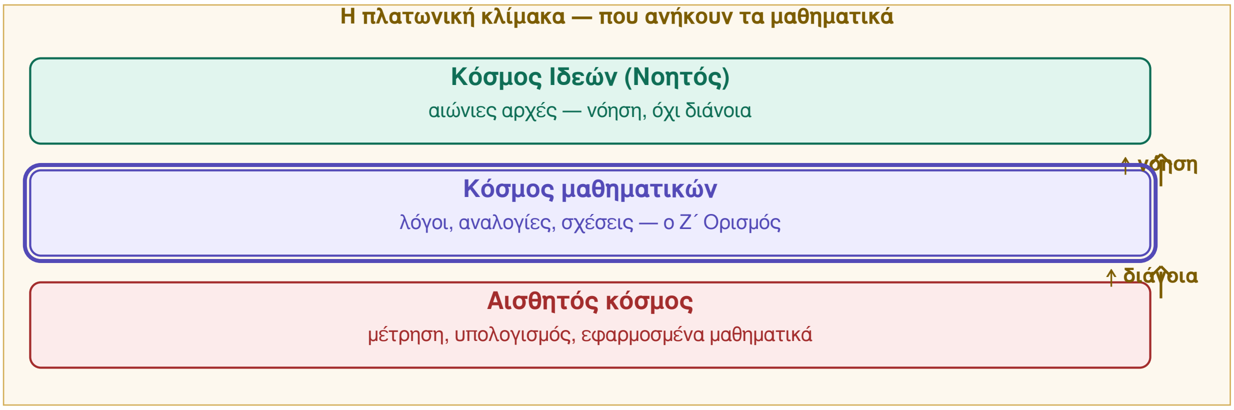
«Ο ωραιότερος από όλους τους δεσμούς είναι αυτός που γίνεται κατά αναλογία... Όταν από τρεις αριθμούς ή όγκους ή δυνάμεις ο μέσος προς τον έσχατο έχει τέτοια σχέση όπως ο πρώτος προς τον μέσο... τότε όλα γίνονται κατ᾽ ανάγκην τα ίδια.»

Ο Δημιουργός έπλασε τον κόσμο ενώνοντας τα στοιχεία σε συνεχή αναλογία: φωτιά : αέρας = αέρας : νερό = νερό : γη. Οι αναλογίες δεν είναι μόνο μαθηματικό εργαλείο — είναι κοσμολογική αρχή. Ο κόσμος είναι όμορφος και αγαθός επειδή είναι ανάλογος.

Όπως σημειώνει ο Σαλόμον Όφμαν: «Η νέα θεωρία των λόγων μετακίνησε το κέντρο των μαθηματικών από τη μελέτη των πραγμάτων στη μελέτη των σχέσεων. Οι συνέπειές της έγιναν αισθητές σε όλη την επιστήμη και ακόμα και στον τρόπο σκέψης των αρχαίων Ελλήνων.»

— ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΩΣ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ —

Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά μετρούν τον αισθητό κόσμο — υπολογίζουν, ποσοτικοποιούν. Αλλά τα μαθηματικά του Ευκλείδη δεν μετρούν — σκέφτονται. Δεν ρωτούν «πόσο μεγάλο είναι αυτό» αλλά «ποια είναι η σχέση του με τα άλλα». Ο Ζ′ Ορισμός δεν λέει "υπολόγισε και σύγκρινε" — λέει "κοίτα πώς συμπεριφέρεται ο λόγος απέναντι σε κάθε δυνατό πολλαπλάσιο". Δεν κοιτά το αποτέλεσμα — κοιτά τη φύση της σχέσης.



Η πλατωνική κλίμακα: τα μαθηματικά στο ενδιάμεσο επίπεδο — πλησίον του νοητού, προ του νοερού.

Αυτό είναι το επίπεδο που ο Πλάτων τοποθετούσε ανάμεσα στον αισθητό κόσμο και τον κόσμο των Ιδεών — ο κόσμος των μαθηματικών αντικειμένων, προσιτός μέσω της διάνοιας αλλά όχι ακόμα μέσω της νόησης. Πλησίον του νοητού, προ του νοερού. Πλησίον του υπερβατικού — όχι ακόμα εντός του.

Ο Ευκλείδης δεν το λέει αυτό ρητά. Αλλά κάθε ορισμός του Βιβλίου V — και ο Ζ′ πιο πολύ από κάθε άλλον — είναι βήμα προς αυτή την κατεύθυνση: από το μετρήσιμο στο σχεσιακό, από το ποσοτικό στο δομικό, από τον αισθητό κόσμο στον νοητό. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος που οι αρχαίοι θεωρούσαν ότι δεν μπορείς να είσαι μαθηματικός χωρίς να είσαι πρώτα φιλόσοφος.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Μουσική: Η πέμπτη (3:2) είναι μεγαλύτερη από την τέταρτη (4:3). Για $m=3$, $n=4$: $3\times3=9 > 4\times2=8$ — υπερέχει. Και $3\times4=12 = 4\times3=12$ — δεν υπερέχει. Η ιεραρχία των μουσικών διαστημάτων έχει μαθηματική αυστηρότητα.

Αρχιτεκτονική: Ο χρυσός λόγος φ είναι αποδεδειγμένα μεγαλύτερος από οποιαδήποτε ρητή προσέγγισή του — όπως το 8:5. Η αρμονία δεν είναι "περίπου" — είναι ακριβώς ορισμένη.

Επιστήμη: Η Πρόταση 8 του Βιβλίου V αποδεικνύει με τον Ζ′ Ορισμό ότι το μεγαλύτερο από δύο μεγέθη έχει μεγαλύτερο λόγο προς ένα τρίτο. Είναι θεμέλιο κάθε επιστημονικής σύγκρισης.

Η΄ Ορισμός

Περί της ελαχίστης αναλογίας

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστί.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Η αναλογία σε τρεις όρους είναι η ελάχιστη δυνατή.

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο ορισμός είναι ο πιο σύντομος του Βιβλίου V — μία μόνο πρόταση. Αλλά κάθε λέξη είναι φορτισμένη.

«Ἀναλογία» — όχι απλώς λόγος. Αυτή είναι η πρώτη φορά που ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη λέξη αναλογία ως τεχνικό όρο ξεχωριστά από τον λόγο. Ο λόγος (Γ΄ Ορισμός) είναι σχέση δύο μεγεθών. Η αναλογία είναι κάτι περισσότερο: ισότητα λόγων — Α:Β = Β:Γ.

«Ἐν τρισὶν ὅροις» — σε τρεις όρους. Ο όρος εδώ σημαίνει μέγεθος που συμμετέχει στην αναλογία. Τρεις και όχι δύο — γιατί δύο μόνο όροι δίνουν λόγο, όχι αναλογία.

«Ἐλαχίστη» — ελάχιστη. Αυτή η λέξη δεν σημαίνει «μικρή» ποσοτικά. Σημαίνει η πιο ανηγμένη, η αδύνατο να μειωθεί περαιτέρω. Είναι η ελάχιστη δυνατή δομή που γεννά αρμονία. Κάτω από τρεις όρους, η αναλογία δεν μπορεί να υπάρξει. Με τρεις όρους, υπάρχει ακριβώς και τίποτα παραπάνω από το αναγκαίο.

— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο Ευκλείδης κάνει εδώ μια θεμελιώδη διάκριση που συχνά παραβλέπεται: η διαφορά ανάμεσα σε λόγο και αναλογία.

Ένας λόγος χρειάζεται δύο όρους: Α:Β. Είναι η σχέση δύο μεγεθών. Μια αναλογία χρειάζεται τουλάχιστον τρεις όρους: Α:Β = Β:Γ. Εδώ έχουμε δύο λόγους που είναι ίσοι, και ο μεσαίος όρος Β εμφανίζεται και στους δύο. Αυτός ο μεσαίος όρος — που οι αρχαίοι ονόμαζαν μέσος ανάλογος — είναι το κλειδί. Δεν είναι απλώς ενδιάμεσος· είναι ο δεσμός που κάνει τους δύο άκρους Α και Γ να ανήκουν σε μία αρμονία.

Παράδειγμα σύμμετρο: Α=4, Β=6, Γ=9. Ελέγχουμε: 4:6 = 2/3 και 6:9 = 2/3. Ίσα. Άρα 4:6 = 6:9 — αναλογία σε τρεις όρους. Ο 6 είναι ο μέσος ανάλογος μεταξύ 4 και 9.

Παράδειγμα με ασύμμετρο μέσο όρο: $1:\sqrt{2} = \sqrt{2}:2$. Εδώ το 1 και το 2 είναι σύμμετρα μεταξύ τους, αλλά ο μέσος ανάλογός τους — το $\sqrt{2}$ — είναι ασύμμετρο με τη μονάδα: δεν

εκφράζεται ως κλάσμα ακεραίων. Και όμως μπορεί να είναι μέσος ανάλογος. Αυτό είναι το μεγαλείο του Η′ Ορισμού: ακόμα και τα άλογα μεγέθη μπορούν να ενταχθούν σε αναλογία. Δεν χρειάζεται κοινό μέτρο — αρκεί η σχεσιακή δομή.

Λόγος vs Αναλογία — η θεμελιακή διάκριση

ΛΟΓΟΣ: δύο όροι	**ΑΝΑΛΟΓΙΑ: τρεις όροι**
Α : Β (σχέση, όχι αρμονία)	Α : Β = Β : Γ (αρμονία)
3 : 5 (μόνο σχέση)	**4 : 6 = 6 : 9**
	ο 6 είναι μέσος ανάλογος
Δεν υπάρχει τρίτος όρος — δεν υπάρχει αναλογία	**4/6 = 6/9 = 2/3 ⍰**

Λόγος και αναλογία: ο πρώτος χρειάζεται δύο όρους, η δεύτερη τρεις.

— ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — Η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΩΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΔΗΛΩΣΗ —

Γιατί «ελαχίστη»; Η απάντηση δεν είναι μόνο μαθηματική — είναι οντολογική.

Με δύο όρους έχουμε σχέση, αλλά όχι αρμονία. Το Α και το Β συγκρίνονται, αλλά δεν «ενώνονται» — μένουν ξεχωριστά, αντίθετα. Είναι η δυάδα: διαφορά χωρίς ενότητα.

Με τρεις όρους συμβαίνει κάτι θαυμαστό: ο μέσος Β κάνει το Α και το Γ να «επικοινωνούν» μέσα από κοινή αναλογία. Ο Α έχει προς τον Β τον ίδιο λόγο που έχει ο Β προς τον Γ. Άρα ο Α «βλέπει» τον Γ μέσα από τον Β — και το σύνολο γίνεται ένα, χωρίς τα τρία να χάσουν τη διαφορά τους. Αυτή είναι η τριάδα: ενότητα μέσα στη διαφορά.

Αυτή είναι η βαθύτερη σημασία της λέξης «ελαχίστη»: δεν μπορείς να έχεις αρμονία με λιγότερο. Η αρμονία δεν είναι πολυτέλεια — είναι το ελάχιστο αναγκαίο για να υπάρξει κόσμος αντί για χάος.

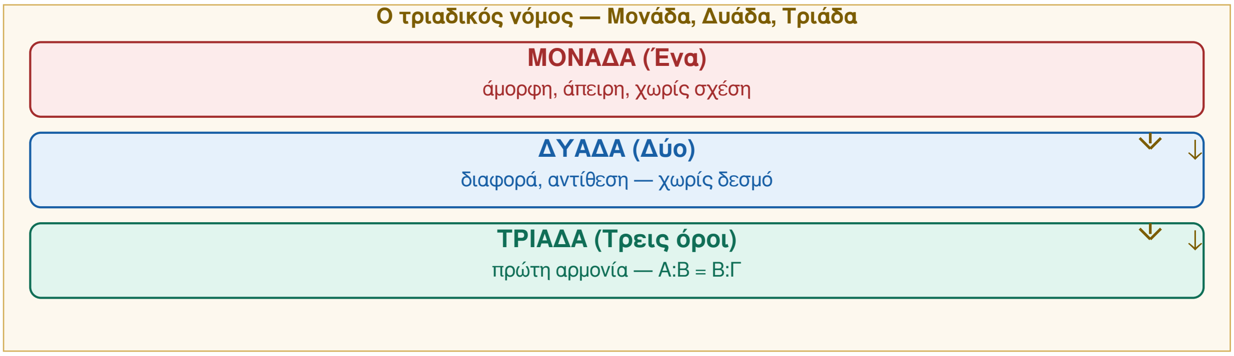
— ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — Ο ΤΡΙΑΔΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ —

Εδώ ο Η′ Ορισμός αγγίζει κάτι που ξεπερνά τα μαθηματικά.

Στην πυθαγόρεια-πλατωνική παράδοση η πραγματικότητα δεν είναι σύνολο πραγμάτων — είναι σύνολο σχέσεων. Κάθε μονάδα που υπάρχει στον κόσμο — ένα σώμα, ένας οργανισμός, ένας γαλαξίας — δεν γεννιέται απλώς, αλλά γεννιέται από τριάδα. Δύο άκρα και ένας μέσος που τα ενώνει. Αυτό είναι ο τριαδικός νόμος της δημιουργίας.

Η Μονάδα — το Ένα — είναι η αρχή, η πηγή. Από μόνη της είναι άμορφη και άπειρη, χωρίς σχέση. Η Δυάδα εισάγει τη διαφορά, την αντίθεση, την πολλαπλότητα. Δύο πράγματα υπάρχουν τώρα — αλλά είναι ξεχωριστά, χωρίς δεσμό. Η Τριάδα είναι η πρώτη αρμονία: ενώνει το Ένα και το Πολλαπλό χωρίς να τα καταστρέφει. Ο μέσος όρος δεν είναι απλώς «ενδιάμεσος» — είναι ο δεσμός που κάνει το διαφορετικό ένα.

Και το πολλαπλό δεν καταστρέφεται από αυτόν τον νόμο. Αντίθετα, κρατιέται ζωντανό μέσα στην ενότητα. Κάθε ον «θυμάται» — φέρει μέσα του — την πρώτη αρμονία προς το Ένα που το γέννησε. Αυτή είναι η επιστροφή (ἐπιστροφή) που οι Νεοπλατωνικοί ανέλυσαν αργότερα: κάθε ον επιθυμεί να διατηρήσει τον τριαδικό δεσμό που το συνδέει με την αρχή.



Ο τριαδικός νόμος: από τη Μονάδα στη Δυάδα στην Τριάδα — η πρώτη αρμονία.

— ΤΑ ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΙΜΑΙΟ —

Ο Πλάτων στον Τίμαιο κάνει αυτόν τον τριαδικό νόμο κοσμολογία. Ο Δημιουργός δεν «κολλάει» τα στοιχεία του κόσμου με δύναμη — τα ενώνει με αναλογία σε τρεις όρους.

«Κάλλιστος δὲ τῶν δεσμῶν ὁ ἀνὰ λόγον… ὅταν οὖν τῶν τριῶν ἀριθμῶν ἢ ὄγκων ἢ δυνάμεων ὁ μέσος πρὸς τὸν ἔσχατον οὕτως ἔχῃ ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ ἀνάπαλιν ὁ ἔσχατος πρὸς τὸν μέσον ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν πρῶτον, τότε ὁ μέσος μὲν πρῶτός τε καὶ ἔσχατος γίγνεται, ὁ δ᾽ ἔσχατος καὶ ὁ πρῶτος ἄμφω μέσοι, πάνθ᾽ οὕτως ἐξ ἀνάγκης ταὐτὰ ἔσται.»

(Τίμαιος 31c–32a)

Μετάφραση: «Ο ωραιότερος από όλους τους δεσμούς είναι αυτός που γίνεται κατά αναλογία… Όταν από τρεις αριθμούς ή όγκους ή δυνάμεις ο μέσος έχει προς τον έσχατο τέτοια σχέση όπως ο πρώτος προς τον μέσο, και αντιστρόφως, τότε ο μέσος γίνεται πρώτος και έσχατος, και ο έσχατος και ο πρώτος γίνονται και οι δύο μέσοι — και όλα γίνονται κατ᾽ ανάγκην τα ίδια.»

Τι λέει αυτό ακριβώς; Ότι όταν ισχύει η τριαδική αναλογία, οι ρόλοι των όρων γίνονται αντιστρέψιμοι: ο πρώτος μπορεί να γίνει μέσος, ο μέσος πρώτος και έσχατος. Η αναλογία δημιουργεί μια εσωτερική ενότητα που υπερβαίνει τη σειρά. Και αυτό ο Πλάτων το ονομάζει «ωραιότερο δεσμό» — γιατί δεν επιβάλλεται εξωτερικά αλλά προκύπτει αναγκαστικά από τη δομή.

«…οὕτω δὴ πυρός τε καὶ γῆς ὕδωρ ἀέρα τε ὁ θεὸς ἐν μέσῳ θείς… συνέδησεν καὶ συνεστήσατο οὐρανὸν ὁρατὸν καὶ ἁπτόν.»

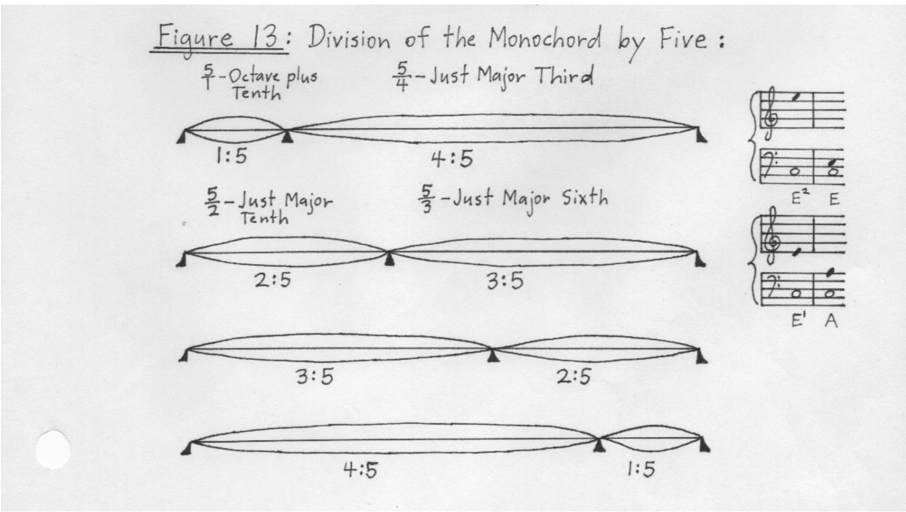
Μετάφραση: «Έτσι ο Θεός, βάζοντας ανάμεσα στο πυρ και τη γη το ύδωρ και τον αέρα… τα συνέδεσε και συγκρότησε τον ορατό και απτό κόσμο.»

Ο Δημιουργός παίρνει τα δύο ακραία στοιχεία — πυρ (ορατό, κινητό) και γη (απτό, σταθερό). Αυτά είναι η δυάδα: αντίθετα και ασυμβίβαστα. Για να τα ενώσει σε έναν στερεό, τρισδιάστατο κόσμο, βάζει δύο μέσους όρους: αέρα και ύδωρ. Και η σχέση είναι γεωμετρική αναλογία ακριβώς κατά τον Η′ Ορισμό: πυρ : αέρας = αέρας : ύδωρ = ύδωρ : γη. Το πολλαπλό — τα τέσσερα στοιχεία — γίνεται ένα και διατηρεί την αρμονία προς το Ένα. Χωρίς τον τριαδικό δεσμό, ο κόσμος θα παρέμενε διασπασμένος. Με αυτόν, η πολλαπλότητα γίνεται κοσμική αρμονία.

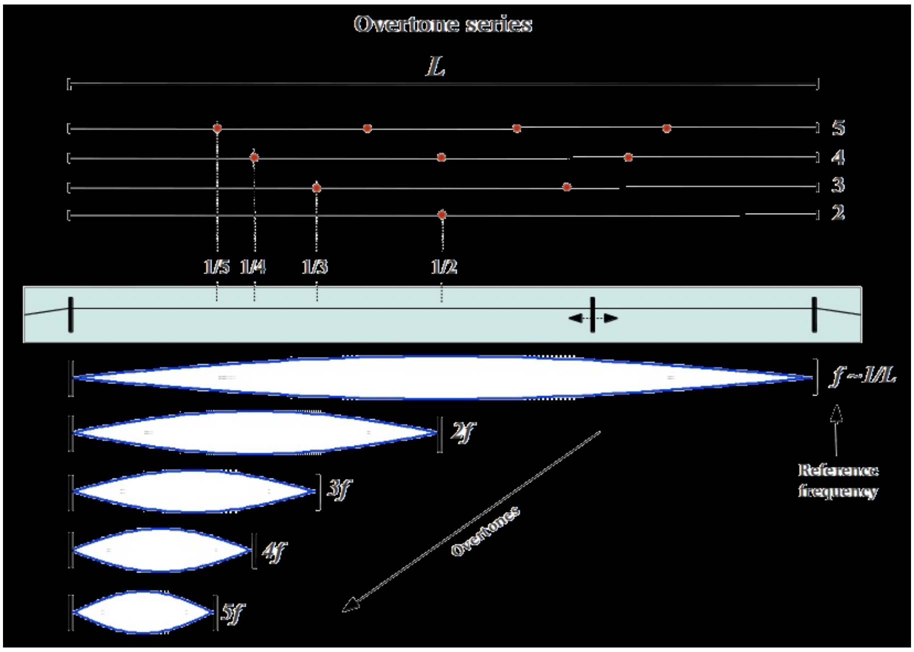
— Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΑΡΜΟΝΙΑ — ΑΠΟ ΤΗ ΧΟΡΔΗ ΣΤΟΝ ΚΟΣΜΟ —

Οι Πυθαγόρειοι δεν έβλεπαν την αρμονία ως κάτι «ωραίο που ακούμε». Την έβλεπαν ως τον νόμο που κρατάει τον κόσμο ενωμένο. Και ξεκίνησαν από μια απλή παρατήρηση: τη χορδή της λύρας.

Όταν χωρίζεις μια χορδή στα δύο, παίρνεις τον ήχο μία οκτάβα πάνω — λόγος 2:1. Στα 2/3, παίρνεις την πέμπτη — λόγος 3:2. Στα 3/4, την τέταρτη — λόγος 4:3. Κάθε αρμονικός ήχος είναι ένας λόγος δύο μηκών χορδής. Αλλά η αναλογία σε τρεις όρους — ο Η′ Ορισμός — απαιτεί κάτι παραπάνω: να υπάρχει μέσος ανάλογος που να κάνει δύο λόγους ίσους.



Διαίρεση του μονόχορδου — Figure 13: Division of the Monochord by Five. Κάθε διαίρεση δίνει έναν λόγο δύο τμημάτων χορδής.



Σειρά αρμονικών (Overtone series): οι συχνότητες 2f, 3f, 4f, 5f αντιστοιχούν σε αναλογίες μηκών χορδής — η οπτική απόδειξη του τριαδικού νόμου στον ήχο.

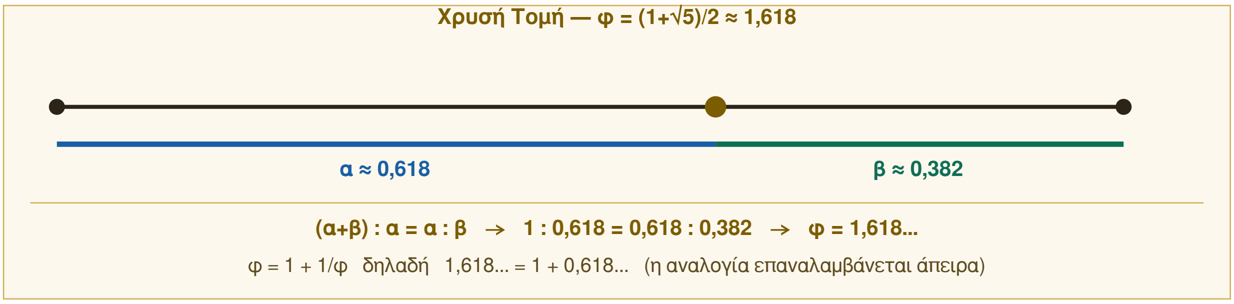
Και οι Πυθαγόρειοι έλεγαν: αυτό που ισχύει για τη χορδή ισχύει για τον κόσμο. Κάθε μονάδα — ένα σώμα, ένας οργανισμός, ένας πλανήτης — γεννιέται από τον ίδιο τριαδικό νόμο και κρατάει μέσα της αυτή την ελάχιστη αρμονία προς το Ένα. Αυτή είναι η αρμονία των σφαιρών: όχι μεταφορά, αλλά κυριολεξία για τους Πυθαγόρειους. Οι πλανήτες «τραγουδούν» επειδή κινούνται σε αναλογίες.

— Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ — Η ΤΕΛΕΙΑ ΤΡΙΑΔΙΚΗ ΑΡΜΟΝΙΑ —

Η Χρυσή Τομή ($\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$) είναι η πιο τέλεια υλοποίηση του Η′ Ορισμού — και η πιο εκπληκτική.

Χωρίζεις μια ευθεία σε δύο μέρη — μεγάλο (α) και μικρό (β) — ώστε: $(\alpha+\beta) : \alpha = \alpha : \beta$. Το όλο προς το μεγαλύτερο μέρος ίσον με το μεγαλύτερο προς το μικρότερο. Τρεις όροι — ακριβώς ο Η′ Ορισμός. Και αυτός ο λόγος είναι το φ.

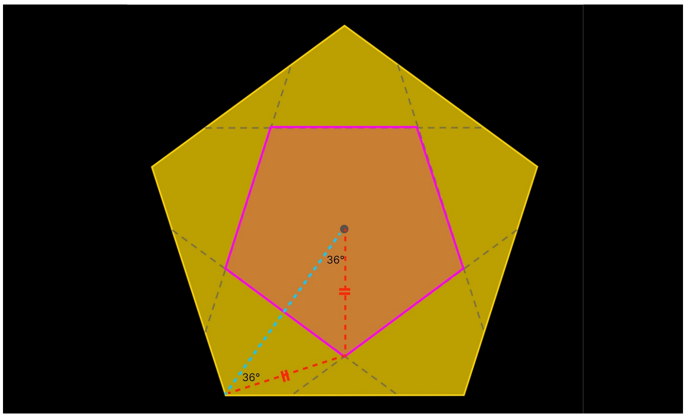
Αλλά εδώ συμβαίνει κάτι μοναδικό. Το $1/\varphi = 2/(1+\sqrt{5}) = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}618$. Και ισχύει: $\varphi = 1 + 1/\varphi$, δηλαδή 1,618... = 1 + 0,618... Αυτό σημαίνει ότι αν αφαιρέσεις το μικρότερο κομμάτι (0,618) από το μεγαλύτερο (1), παίρνεις πάλι τον ίδιο λόγο — η αναλογία επαναλαμβάνεται άπειρα μέσα στον εαυτό της. Αυτή είναι η αυτο-ομοιότητα (self-similarity): το πολλαπλό δεν χάνει ποτέ τη σχέση του με το Ένα, γιατί σε κάθε κλίμακα φέρει την ίδια αναλογία. Είναι σαν ο κόσμος να λέει συνεχώς: «Είμαι πολλαπλός, αλλά μένω ενωμένος με το Ένα.»



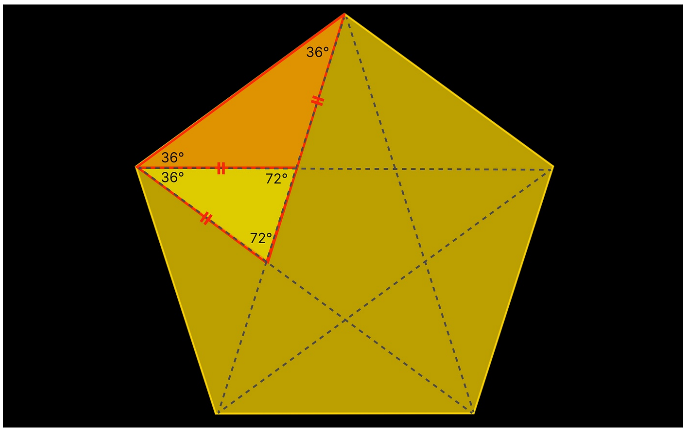
Χρυσή Τομή: (α+β):α = α:β = φ ≈ 1,618. Και φ = 1 + 1/φ — η αναλογία επαναλαμβάνεται άπειρα.

Ο Ευκλείδης κατασκευάζει τη Χρυσή Τομή στο Βιβλίο VI (Πρόταση 30) και την χρησιμοποιεί εκτενώς στο Βιβλίο XIII για τα κανονικά στερεά. Στο κανονικό πεντάγωνο η διαγώνιος προς την πλευρά είναι ακριβώς φ. Και το δωδεκάεδρο — που ο Πλάτων ταύτιζε με το σύμπαν — είναι χτισμένο πάνω σε αυτή την αναλογία.

Το κανονικό πεντάγωνο — γεωμετρική ενσάρκωση του τριαδικού νόμου:



Το εσωτερικό πεντάγωνο ενός κανονικού πενταγώνου — η Χρυσή Τομή επαναλαμβάνεται άπειρα. Γωνία 36°.



Τα χρυσά τρίγωνα εντός του πενταγώνου — γωνίες 36° και 72°. Η διαγώνιος προς την πλευρά είναι ακριβώς φ.

Το πεντάγωνο και το δωδεκάεδρο δεν είναι τυχαία σχήματα. Είναι η γεωμετρική ενσάρκωση του τριαδικού νόμου: δύο διαφορετικά μήκη (πλευρά και διαγώνιος) ενωμένα με τον μέσο όρο της Χρυσής Τομής, δημιουργούν την πιο σταθερή και όμορφη μορφή. Το πολλαπλό (οι πολλές πλευρές) δεν διαλύεται· κρατιέται σε τέλεια αρμονία προς το Ένα.

— Ο ΑΟΡΑΤΟΣ ΔΕΣΜΟΣ —

Στον Τίμαιο ο δεσμός που συγκρατεί τον κόσμο — η αναλογία — είναι αόρατος. Δεν είναι υλικός, δεν τον βλέπεις. Είναι γεωμετρικός-μαθηματικός. Και όμως κρατάει τα ορατά στοιχεία σε αρμονία.

Αυτή η εικόνα του αόρατου δεσμού που συγκρατεί το ορατό σύμπαν δεν είναι άγνωστη στη σύγχρονη εποχή. Η επιστήμη παρατηρεί ότι το ορατό σύμπαν — αστέρια, γαλαξίες — δεν είναι αρκετό για να εξηγήσει πώς συγκρατείται η κοσμική δομή. Υπάρχει κάτι αόρατο που αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας του σύμπαντος — η λεγόμενη σκοτεινή ύλη και σκοτεινή ενέργεια. Δεν αλληλεπιδρά με το φως, δεν είναι ορατή — αλλά είναι πανταχού παρούσα και κρατάει τη δομή.

Η παραλληλία με τον πλατωνικό δεσμό είναι ποιητική, όχι επιστημονική. Αλλά είναι εκπληκτικό που και οι δύο — ο αρχαίος φιλόσοφος και ο σύγχρονος επιστήμονας — καταλήγουν στην ίδια διαπίστωση: αυτό που συγκρατεί τον κόσμο δεν είναι αυτό που βλέπουμε.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Μουσική: Κάθε αρμονικό μουσικό διάστημα — οκτάβα, πέμπτη, τέταρτη — είναι λόγος δύο μηκών χορδής. Αλλά η αναλογία σε τρεις όρους — ο Η΄ Ορισμός — είναι η δομή που κάνει τον ήχο να «ζει» ως αρμονία, όχι απλώς ως σχέση.

Αρχιτεκτονική: Ο Παρθενώνας, η Αγία Σοφία, οι γοτθικοί καθεδρικοί χτίστηκαν με τριαδικές αναλογίες. Δεν ήταν αισθητική επιλογή — ήταν φιλοσοφική: ο ναός πρέπει να ενσαρκώνει τον τριαδικό νόμο που δομεί τον κόσμο.

Φύση: Τα φύλλα των φυτών, τα κελύφη, τα σώματα των ζώων — παντού εμφανίζονται αναλογίες σε τρεις όρους. Η φύση δεν «επιλέγει» τυχαία τη Χρυσή Τομή — την ακολουθεί γιατί είναι η πιο σταθερή, η πιο αποδοτική, η πιο «ελάχιστη» δομή αρμονίας.

Σύνδεση με τους προηγούμενους ορισμούς: Ο Γ΄ Ορισμός είπε ότι ο λόγος υπάρχει. Ο Ε΄ είπε πότε δύο λόγοι είναι ίσοι. Ο Ζ΄ είπε πότε ένας λόγος είναι μεγαλύτερος. Ο Η΄ λέει: όταν δύο λόγοι γίνουν ίσοι με κοινό μεσαίο όρο, τότε έχουμε αναλογία — και αυτή είναι η ελάχιστη δομή που γεννά αρμονία. Η αρχιτεκτονική του Βιβλίου V ολοκληρώνεται.

Θ΄ Ορισμός

Ο Τριαδικός Νόμος — Μαθηματική, Μεταφυσική και Ηθική Ανάλυση

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Όταν τρία μεγέθη είναι ανάλογα, λέγεται ότι το πρώτο έχει διπλάσιο λόγο προς το τρίτο παρά προς το δεύτερο.

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Τρία μεγέθη ἀνάλογον» — ο Θ′ Ορισμός προϋποθέτει ρητά τον Η′: τρία μεγέθη σε συνεχή αναλογία, δηλαδή Α:Β = Β:Γ. Δεν ορίζει εκ νέου — οικοδομεί πάνω σε αυτό που ήδη έχει θεμελιωθεί.

«Διπλασίονα λόγον» — η λέξη «διπλάσιος» εδώ δεν σημαίνει «δύο φορές μεγαλύτερος» με την αριθμητική έννοια. Σημαίνει «λόγος που έχει συντεθεί δύο φορές» — δηλαδή ο λόγος Α:Β εφαρμοσμένος πάνω στον εαυτό του: $(Α:Β)^2$. Είναι σύνθεση λόγων, όχι πρόσθεση.

«Λέγεται» — και πάλι η χαρακτηριστική προσοχή του Ευκλείδη: δεν λέει «είναι» αλλά «λέγεται ότι είναι». Ο διπλάσιος λόγος είναι ορολογία — σύμβαση — για να ονομάσουμε τη σχέση που προκύπτει από τη συνεχή αναλογία.

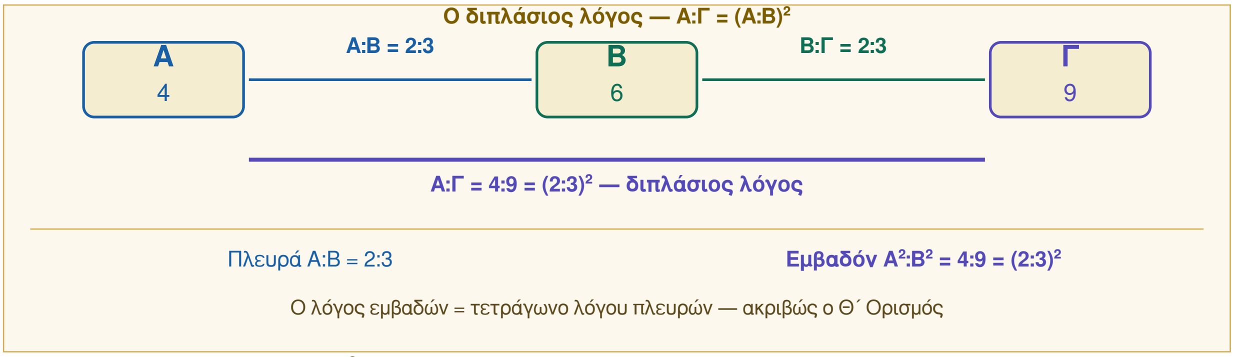
— 1. Ο Θ΄ ΟΡΙΣΜΟΣ — ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Σε σύγχρονη διατύπωση: αν ισχύει η συνεχής αναλογία Α:Β = Β:Γ, τότε η σχέση του πρώτου προς το τρίτο είναι το τετράγωνο του αρχικού λόγου:

$$Α : Γ = (Α : Β)^2$$

Παράδειγμα: Αν Α=4, Β=6, Γ=9, τότε 4:6 = 6:9 (λόγος 2:3) και $4:9 = (2:3)^2 = 4:9$. ✓

Ο Θ′ Ορισμός είναι η άμεση συνέπεια του Η′. Μόλις έχουμε μια βασική αρμονία σε τρεις όρους, αυτή η αρμονία δεν μένει απλή — παράγει αυτόματα μια ισχυρότερη, πιο πυκνή σχέση: τον τετραγωνισμένο λόγο. Η δημιουργία και η ομοίωση δεν είναι γραμμικές διαδικασίες· είναι γεωμετρικά δυναμικές.



Ο διπλάσιος λόγος: Α:Γ = $(Α:Β)^2$. Ο λόγος των εμβαδών ισούται με το τετράγωνο του λόγου των αντίστοιχων πλευρών.

— 2. ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ — Ο ΤΡΙΑΔΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ —

Ο Τριαδικός Νόμος (Ένα – Τριάδα – Δυάδα) είναι η βαθύτερη οντολογική αρχή που διέπει την ύπαρξη. Ο Θ′ Ορισμός δίνει σε αυτή την αρχή τη μαθηματική της διατύπωση:

Α = Το Ένα — ο Δημιουργός, η Αρχή, η καθαρή Ιδέα, το Απόλυτο.

Β = Η Τριάδα — ο μέσος δεσμός, η αρμονία, ο ζωντανός μέσος λόγος.

Γ = Η Δυάδα — η πολλαπλότητα, το δημιούργημα, η υλική μονάδα.

Όταν επιτυγχάνεται η βασική αρμονία (Α:Β = Β:Γ), η σχέση του Ενός προς το δημιούργημα δεν παραμένει απλή αλλά γίνεται τετραγωνισμένη: Α:Γ = $(Α:Β)^2$. Αυτό σημαίνει ότι η Τριάδα δεν είναι απλώς μια γέφυρα — είναι ο ενισχυτής που κάνει τη σχέση Ενός–δημιουργήματος πιο ισχυρή, πιο πυκνή και πιο ουσιαστική.

Η Τριάδα (Β) λειτουργεί ως δύναμη πολλαπλασιασμού: χωρίς αυτήν, το Ένα και το δημιούργημα θα παρέμεναν σε αδύναμη σχέση· με αυτήν, η δημιουργία παίρνει γεωμετρική ένταση. Η μονάδα δεν είναι απλό αντίγραφο αλλά ενισχυμένη παρουσία του Ενός μέσα στην πολλαπλότητα.

— 3. Η ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ – ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ —

Ο Θ′ Ορισμός αποκαλύπτει μια θεμελιώδη ασυμμετρία στη σχέση Ενός–δημιουργήματος, την οποία ο Πλωτίνος περιγράφει μεταφυσικά στις Εννεάδες.

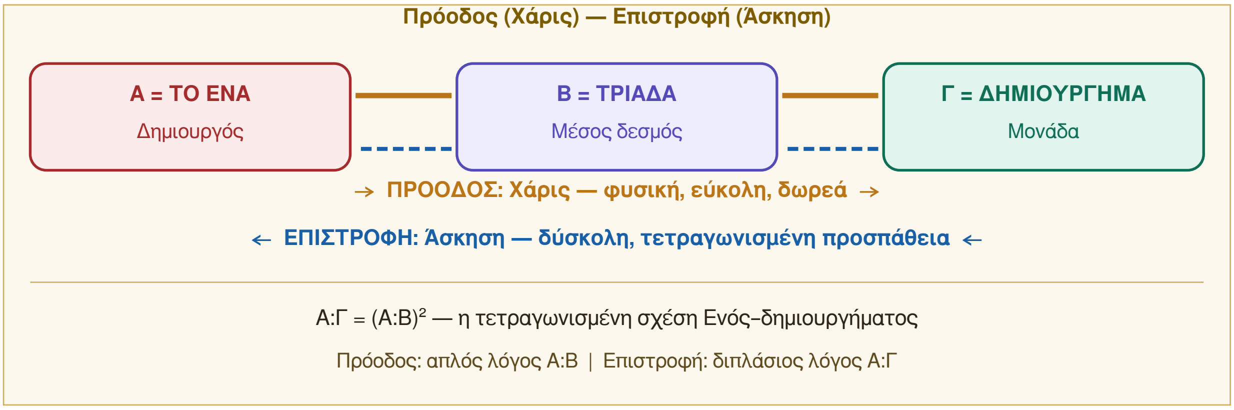
Πρόοδος (καταγωγή) — η Χάρις

Το Ένα δίνει με γενναιοδωρία — η εκπομπή είναι η φύση του. Ο μέσος δεσμός (Β) διαμορφώνεται ισχυρός, και το δημιούργημα (Γ) δέχεται μια τετραγωνισμένη δωρεά στήριξης. Η Πρόοδος είναι χάρις — δωρεά που δεν κοστίζει τίποτε στο Ένα, γιατί η εκπομπή είναι η φύση του.

Επιστροφή (αναγωγή) — η Άσκηση

Η μονάδα (Γ) πρέπει να διανύσει την ίδια απόσταση αλλά προς τα πάνω, ενάντια στη ροή της πολλαπλότητας. Επειδή η σχέση Α:Γ είναι τετραγωνισμένη, η προσπάθεια που

απαιτείται είναι πολλαπλάσια. Ο Πλωτίνος το διατυπώνει στην Εννεάδα VI, 9: «Πρέπει να αφήσει πίσω του όχι μόνο τα αισθητά, αλλά και τα νοητά… Μόνο όταν η ψυχή γίνει εντελώς απλή, μπορεί να δει το Απλό.»



Η ασυμμετρία Πρόοδος–Επιστροφή: η κατάβαση είναι χάρις, η αναγωγή απαιτεί τετραγωνισμένη προσπάθεια.

— 4. Η ΔΙΠΛΑΣΙΑ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ ΖΩΗ —

Η τετραγωνισμένη προσπάθεια της Επιστροφής δεν είναι αφηρημένη. Βιώνεται καθημερινά ως η συνειδητή κίνηση από την πολλαπλότητα (σκέψεις, ερεθίσματα, πάθη) προς την ενότητα της συνείδησης.

Στην εργασία

Είναι εύκολο να παρασυρθείς από emails, meetings και άγχος. Η «διπλάσια προσπάθεια» είναι να σταματάς συνειδητά και να ρωτάς: «Γιατί το κάνω αυτό; Ποια είναι η βαθύτερη αξία πίσω από αυτή την ενέργεια;» Αυτή η στιγμή αυτοπαρατήρησης είναι η τετραγωνισμένη προσπάθεια.

Στις σχέσεις

Η αυτόματη αντίδραση — θυμός, κριτική, εγωισμός — είναι η φυσική ροή. Η διπλάσια προσπάθεια είναι να παρατηρείς τον εαυτό σου τη στιγμή που ανεβαίνει ο θυμός και να επιλέγεις συνειδητά την κατανόηση. Αυτό δεν είναι «φυσικό» — είναι ασκητικό.

Στην αυτογνωσία

Το πρωί ξυπνάς και το μυαλό σου γεμίζει αμέσως με πλήθος σκέψεων (πολλαπλότητα). Η διπλάσια προσπάθεια είναι να καθίσεις 10-15 λεπτά σε διαλογισμό ή απλή παρατήρηση της αναπνοής, για να επανέλθεις στην ενότητα της συνείδησης. Αυτό το «γύρισμα προς τα μέσα» είναι η Επιστροφή.

Γιατί είναι «διπλάσια»: γιατί η πολλαπλότητα έχει ήδη μεγάλη αδράνεια. Το Ένα είναι απλό και ήσυχο. Για να επιστρέψεις από το θορυβώδες πολλαπλό στο απλό Ένα, πρέπει να ασκήσεις πολλαπλάσια δύναμη από αυτήν που χρειάζεται για να παρασυρθείς.

— 5. ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΒΑΘΜΙΔΕΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΠΛΩΤΙΝΟ —



Οι τρεις βαθμίδες της πλωτινικής πορείας προς την ένωση με το Ένα.

① Κάθαρση

Συνειδητή αποκόλληση από τις υλικές επιθυμίες, τις εξωτερικές εξαρτήσεις και τα πάθη. Περιορισμός περιττών ερεθισμάτων, παρατήρηση των παθών τη στιγμή που εμφανίζονται, απλότητα στον τρόπο ζωής. Ο Πλωτίνος λέει: «Πρέπει να αποβάλουμε ό,τι είναι ξένο στην ψυχή, όπως καθαρίζουμε ένα άγαλμα».

② Διάλεξη και Θεωρία

Σταδιακή στροφή του νου από τα εξωτερικά στα εσωτερικά. Καθημερινή σιωπή, ενδοσκόπηση («Ποιος είναι αυτός που σκέφτεται;»), ενατένιση όμορφων πραγμάτων — φύση, τέχνη, μαθηματικά — για να δούμε μέσα τους την ενότητα. Στόχος είναι ο νους να γίνει ακίνητος και απλός.

③ Αρετή και Ομοίωση

Η αρετή δεν είναι απλώς «καλή συμπεριφορά» αλλά μεταμόρφωση του χαρακτήρα ώστε η ψυχή να γίνει όμοια με το Ένα. Πρακτικά: δικαιοσύνη, σωφροσύνη, ανδρεία και φρόνηση από εσωτερική ανάγκη· μετατροπή κάθε δυσκολίας σε άσκηση ομοίωσης· καλλιέργεια απάθειας (αταραξίας) — εσωτερικής ελευθερίας από τα πάθη, όχι αδιαφορίας.

— 6. Η ΕΚΣΤΑΣΗ — ΧΑΡΙΣ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ ΩΣ ΕΝΑ —

Για τον Πλωτίνο η έκσταση δεν είναι συναισθηματική κατάσταση αλλά η πλήρης ένωση της ψυχής με το Ένα, όπου η μονάδα (Γ) χάνει τα όριά της και γίνεται ένα με την Πηγή (Α). Εδώ η σχέση Χάριτος–Ελευθερίας φτάνει στην απόλυτη κορύφωσή της.

Χάρις: Η τελική δωρεά του Ενός — «τραβάει» την ψυχή με δύναμη που δεν μπορεί να προκληθεί από την ίδια την ψυχή.

Ελευθερία: Η πλήρης, συνειδητή συγκατάθεση της ψυχής — όχι πια «προσπάθεια» αλλά απόλυτη παράδοση.

Ο Πλωτίνος περιγράφει αυτή τη στιγμή (Εννεάδες VI, 9):

«Εκείνη τη στιγμή δεν υπάρχει πια ούτε κίνηση, ούτε χώρος, ούτε χρόνος. Η ψυχή δεν βλέπει πια, αλλά γίνεται αυτό που βλέπει. Δεν είναι πια δύο, αλλά ένα.»

Συνδέοντας με τον Θ′ Ορισμό: κατά την Πρόοδο το Ένα δίνει με τετραγωνισμένη γενναιοδωρία· κατά την Επιστροφή η ψυχή ανταποκρίνεται με τετραγωνισμένη προσπάθεια· στην Έκσταση η προσπάθεια σταματά. Η Χάρις γίνεται τόσο δυνατή που η διαφορά μεταξύ Χάριτος και Ελευθερίας καταργείται.

Ο Πλωτίνος είχε τέσσερις τέτοιες εμπειρίες κατά τη ζωή του: μια στιγμή απόλυτης ησυχίας νου, μια αίσθηση ότι «το εγώ διαλύεται» χωρίς φόβο, μια πληρότητα που δεν προέρχεται από τίποτε εξωτερικό, και μια επιστροφή στο σώμα σαν να «ξύπνησε» από έναν βαθύ, φωτεινό ύπνο.

Το παράδοξο του Πλωτίνου: η μεγαλύτερη ελευθερία είναι η πλήρης παράδοση στη Χάρη. Η ψυχή δεν χάνει την ελευθερία της — την ολοκληρώνει.

— 7. ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ ΡΟΥΤΙΝΑ —

Εμπνευσμένη από τον Πλωτίνο, μια ρουτίνα για την υποστήριξη της Επιστροφής:

Πρωί: 10-15 λεπτά σιωπή και ενδοσκόπηση («Ποιος είμαι πίσω από τις σκέψεις μου;»).

Κατά τη διάρκεια της ημέρας: Συνειδητές μικρές παύσεις αυτοπαρατήρησης — ιδιαίτερα τη στιγμή έντασης, θυμού ή άγχους.

Βράδυ: Ανασκόπηση της ημέρας χωρίς κριτική, με ερώτηση: «Πόσο κοντά ήμουν σήμερα στην ενότητα;»

Συνεχώς: Καλλιέργεια ομορφιάς, απλότητας και αρετής.

Σημαντική σημείωση: ο Πλωτίνος προειδοποιεί ότι η έκσταση δεν μπορεί να «προκληθεί» — είναι δώρο (Χάρις). Η προετοιμασία είναι μόνο να κάνουμε την ψυχή ικανή να το δεχτεί, όταν και αν έρθει.

— ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ —

Ο Θ′ Ορισμός δεν είναι απλώς μια μαθηματική συνέπεια. Είναι η μεταφυσική αποκάλυψη ότι η αρμονία είναι δυναμική. Ο πυρήνας του Τριαδικού Νόμου μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η ύπαρξη δεν είναι ούτε καθαρή ενότητα ούτε καθαρή πολλαπλότητα, αλλά η δυναμική, ενισχυμένη αρμονία που παράγεται από την Τριάδα.

Η μονάδα στηρίζεται μόνο όταν ο μέσος δεσμός (B) είναι τόσο ισχυρός ώστε η σχέση της με το Ένα να γίνεται τετραγωνισμένη. Αυτή η τετραγωνισμένη σχέση είναι η πραγματική στήριξη της δημιουργίας.

Η δημιουργία είναι δώρο (εύκολο για το Ένα). Η ολοκλήρωση είναι έργο (δύσκολο για τη μονάδα). Και η Έκσταση είναι η στιγμή όπου η διάκριση μεταξύ δώρου και έργου, Χάριτος

και Ελευθερίας, εξαφανίζεται.

Ι′ Ορισμός

Ο Τριαδικός Νόμος επεκτείνεται — Η Κυβική Αρμονία

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἐφεξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Όταν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα, τότε το πρώτο προς το τέταρτο λέγεται ότι έχει τριπλάσιο λόγο από ό,τι έχει προς το δεύτερο, και γενικά εξής ομοίως, ανάλογα με το πόσα μεγέθη υπάρχουν στην αναλογία.

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον» — ο Ι′ Ορισμός επεκτείνει ρητά τον Θ′: από τρία μεγέθη σε τέσσερα. Η λέξη «ἀνάλογον» παραπέμπει στον ΣΤ′ Ορισμό — μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο. Εδώ η συνεχής αναλογία Α:Β = Β:Γ = Γ:Δ.

«Τριπλασίονα λόγον» — τριπλάσιος λόγος: ο αρχικός λόγος συντεθειμένος τρεις φορές, δηλαδή $(Α:Β)^3$. Είναι η φυσική επέκταση του «διπλασίονα» του Θ′ Ορισμού.

«Καὶ ἀεὶ ἐφεξῆς ὁμοίως» — και πάντα εφεξής ομοίως. Αυτή η φράση είναι μοναδική στο Βιβλίο V: ο Ευκλείδης γενικεύει ρητά σε n μεγέθη. Δεν χρειάζονται άλλοι ορισμοί — ο νόμος ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος όρων.

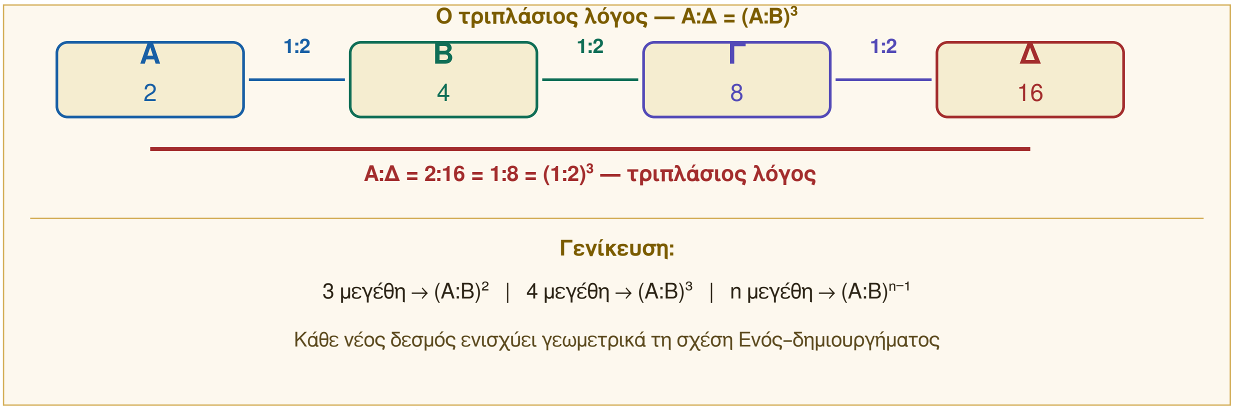
— 1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ —

Αν έχουμε τέσσερα μεγέθη σε συνεχή αναλογία: Α:Β = Β:Γ = Γ:Δ, τότε σύμφωνα με τον Ι′ Ορισμό:

$$Α : Δ = (Α : Β)^3$$

Αριθμητικό παράδειγμα: Α=2, Β=4, Γ=8, Δ=16 (λόγος 1:2 σε όλη την ακολουθία). Α:Β = 2:4 = 1:2, Β:Γ = 4:8 = 1:2, Γ:Δ = 8:16 = 1:2. Τότε: Α:Δ = 2:16 = 1:8 = $(1:2)^3$. ✓

Η γενίκευση που ο Ευκλείδης εκφράζει με τη φράση «καὶ ἀεὶ ἐφεξῆς ὁμοίως» είναι: για 3 μεγέθη → διπλάσιος λόγος → $(Α:Β)^2$, για 4 μεγέθη → τριπλάσιος λόγος → $(Α:Β)^3$, για n μεγέθη → (n-1)-πλάσιος λόγος → $(Α:Β)^{n-1}$.



Ο τριπλάσιος λόγος: Α:Δ = $(Α:Β)^3$. Κάθε νέος δεσμός στην αναλογία ενισχύει γεωμετρικά τη σχέση πρώτου–τελευταίου.

— 2. ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ —

Ο Ι′ Ορισμός αποτελεί φυσική επέκταση του τριαδικού νόμου: ο Η′ Ορισμός μας έδωσε την ελάχιστη αρμονία (τρία μεγέθη), ο Θ′ Ορισμός μας έδειξε ότι αυτή η αρμονία ενισχύεται (τετραγωνίζεται), και ο Ι′ Ορισμός μας λέει ότι όσο αυξάνεται η αλυσίδα της αρμονίας, τόσο πιο ισχυρή και πολλαπλασιασμένη γίνεται η σχέση του πρώτου με τον τελευταίο.

Μεταφυσικά: το Ένα (Α) δημιουργεί το πολλαπλό (Δ) μέσω διαδοχικών δεσμών (Β, Γ…). Κάθε νέος δεσμός πολλαπλασιάζει την αρχική δύναμη. Όσο πιο μακριά φτάνει η δημιουργία από την Αρχή, τόσο πιο ισχυρή πρέπει να είναι η αρχική δωρεά, ώστε το δημιούργημα να διατηρεί ακόμα σχέση με το Ένα. Αυτό εξηγεί γιατί στον Πλωτίνο η Πρόοδος δεν οδηγεί σε πτώση, αλλά σε ιεραρχική δομή όπου κάθε βαθμίδα κρατάει γεωμετρικά ενισχυμένη σχέση με την πηγή.

— 3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΜΟΥΣΙΚΗ —

Παράδειγμα 1: Διαδοχικές πέμπτες

Α = Ντο, Β = Σολ (λόγος 3:2), Γ = Ρε (επόμενη οκτάβα, πάλι 3:2), Δ = Λα (πάλι 3:2). Αποτέλεσμα: Α:Δ = $(3:2)^3$ = 27:8. Αυτό είναι το διάστημα Ντο→Λα (μία οκτάβα + μείζονα έκτη). Ακούγεται πολύ πιο πλούσιο και σταθερό από μια απλή πέμπτη.

Παράδειγμα 2: Οκτάβες

Α = Ντο, Β = Ντο (οκτάβα πάνω, 2:1), Γ = Ντο (δύο οκτάβες, 4:1), Δ = Ντο (τρεις οκτάβες, 8:1). Α:Δ = 8:1 = $(2:1)^3$ — ακριβώς ο τριπλάσιος λόγος.

— 4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΦΥΣΗ —

Κύβος και γεωμετρική πρόοδος

Α=1, Β=2, Γ=4, Δ=8 (πλευρές διαδοχικών κύβων). Α:Δ = 1:8 = $(1:2)^3$ — τριπλάσιος λόγος. Ο λόγος των όγκων τριών ομοίων κύβων ισούται με τον κύβο του λόγου των πλευρών τους.

Χρυσή Τομή σε υψηλότερη τάξη

Αν κάθε διαγώνιος πενταγώνου είναι φ φορές μεγαλύτερη από την πλευρά, τότε μετά από τρία βήματα η σχέση γίνεται $\varphi^3 \approx 4{,}236$. Η γεωμετρία δείχνει ότι η αρμονία δεν σταματά στην απλή αναλογία — όσο πιο μακριά πηγαίνουμε, τόσο πιο ισχυρή γίνεται η αρχική δομή.

Στη φύση

Η σπείρα ναυτίλου: $Α:Δ = \varphi^3 \approx 4{,}236$. Η φύση χρησιμοποιεί αυτόν τον πολλαπλασιασμό για να δημιουργήσει αυτο-ομοιότητα σε διαφορετικές κλίμακες. Στα κλαδιά δέντρων, στη φτέρη, στα ηλιοτρόπια — μετά από 3-4 βήματα αναλογίας, οι σχέσεις ακολουθούν κυβική ή υψηλότερη δύναμη του αρχικού λόγου.

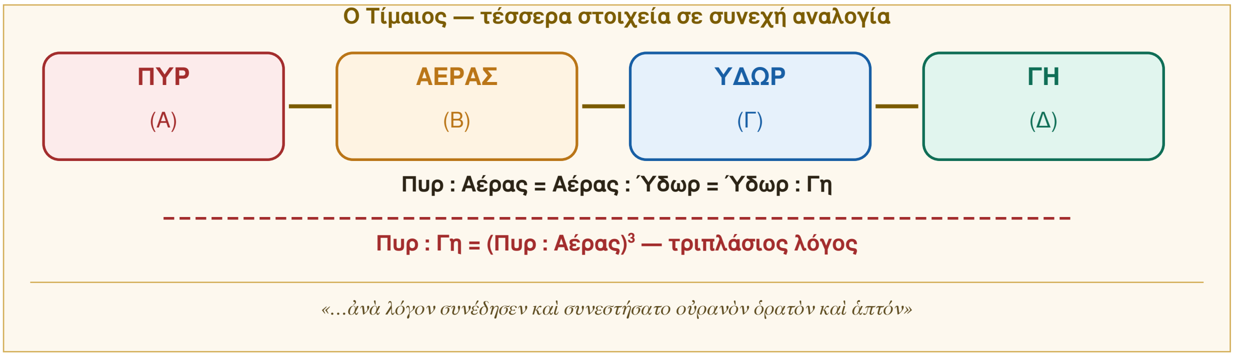
— 5. ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΤΟΝ ΤΙΜΑΙΟ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ —

Ο Ι′ Ορισμός είναι η μαθηματική αποτύπωση μιας βαθιάς κοσμολογικής αρχής που ο Πλάτων αναπτύσσει εκτενώς στον Τίμαιο.

Στον Τίμαιο (31b–32c), ο Πλάτων εξηγεί πώς ο Δημιουργός δομεί τον κόσμο:

«Ὁ θεὸς … πῦρ καὶ γῆν … συνέδησεν … ἀέρα καὶ ὕδωρ … καὶ διέταξεν ἀνὰ λόγον … ὥστε ὅτι μάλιστα ταὐτὸν εἶναι πρὸς ἄλληλα.»

Μετάφραση: «Ο Θεός … πυρ και γη … συνέδεσε … αέρα και ύδωρ … και τα διέταξε κατ᾽ αναλογία … ώστε να είναι κατά το μέγιστον ίδια μεταξύ τους.»



Τα τέσσερα στοιχεία του Τίμαιου σε συνεχή αναλογία — ακριβώς ο Ι΄ Ορισμός σε κοσμολογικό επίπεδο.

Για να ενώσει τα δύο ακραία στοιχεία (Πυρ και Γη), ο Δημιουργός έβαλε δύο μέσους όρους (Αέρα και Ύδωρ), δημιουργώντας συνεχή αναλογία: Πυρ : Αέρας = Αέρας : Ύδωρ = Ύδωρ : Γη. Ο κόσμος δεν είναι μια απλή δυάδα (Πυρ–Γη). Χρειάζεται δύο μέσους όρους για να γίνει στερεός και αρμονικός. Η σχέση Πυρ:Γη είναι τριπλάσια — πολύ πιο ισχυρή, πιο δεμένη, πιο «οντολογικά πυκνή».

«…ἀνὰ λόγον συνέδησεν καὶ συνεστήσατο οὐρανὸν ὁρατὸν καὶ ἁπτόν.»

Μετάφραση: «…τα συνέδεσε με αναλογία και συγκρότησε τον ορατό και απτό ουρανό.»

Η αναλογία δεν είναι διακοσμητική. Είναι ο ωραιότερος δεσμός. Και όταν αυτή η αναλογία επεκτείνεται σε τέσσερα μεγέθη, η δύναμη του δεσμού κυβίζεται — γίνεται πολύ πιο ισχυρή.

— 6. Η ΤΡΙΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΩΣ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ —

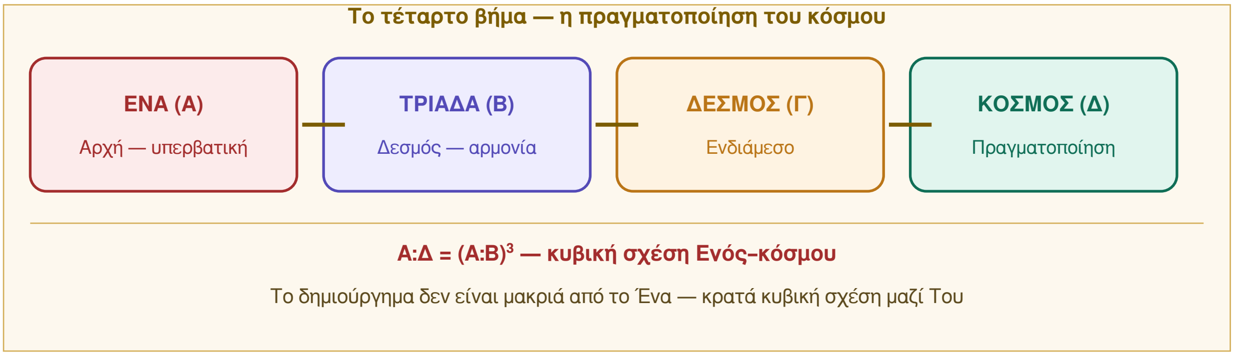
Σύμφωνα με τον τριαδικό νόμο και τον Ι′ Ορισμό, ο κόσμος δεν ξεκινά από το Ένα ούτε από το Δύο, αλλά από το Τρία.

Το Ένα (Α) — η Αρχή, ο Δημιουργός, η καθαρή Ιδέα. Από μόνο του είναι άμορφο και υπερβατικό. Δεν δημιουργεί ακόμα κόσμο.

Το Δύο (η Δυάδα) — η πολλαπλότητα, η διαφορά, η ύλη. Από μόνο του είναι χαοτικό και ασύνδετο. Δεν μπορεί να σταθεί ως κόσμος.

Το Τρία (η Τριάδα) — εδώ γεννιέται η πρώτη πραγματική μονάδα. Είναι ο πρώτος δεσμός, η πρώτη αρμονία (Α:Β = Β:Γ). Μόνο όταν εμφανίζεται η Τριάδα, υπάρχει κόσμος — δηλαδή τάξη, σχέση και ενότητα μέσα στη διαφορά.

Το Τέταρτο (το Δημιούργημα – Δ) — εδώ έρχεται ο Ι′ Ορισμός. Όταν η Τριάδα ολοκληρώνεται και επεκτείνεται στο τέταρτο στοιχείο, η σχέση του Ενός προς το δημιούργημα γίνεται κυβική. Το Τέταρτο δεν είναι απλή προσθήκη — είναι η πραγματοποίηση του κόσμου ως σταθερής, αυτοσυντηρούμενης πραγματικότητας.



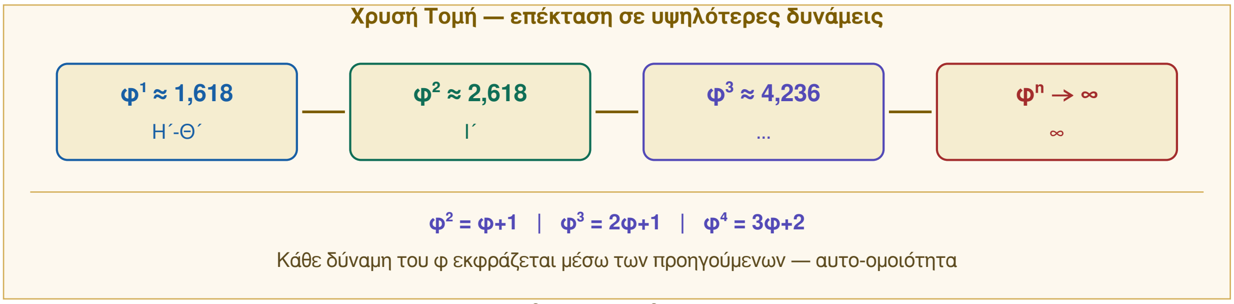
Η οντολογική κλίμακα: από το Ένα στην πραγματοποίηση του κόσμου μέσω κυβικής αρμονίας.

— 7. ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΤΗ ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ (φ) —

Η Χρυσή Τομή είναι η πιο τέλεια υλοποίηση του τριαδικού νόμου και ταυτόχρονα η βάση για την επέκταση του Ι′ Ορισμού.

Αν προσθέσουμε τέταρτο όρο Δ ώστε Α:Β = Β:Γ = Γ:Δ = φ, τότε σύμφωνα με τον Ι′ Ορισμό: Α:Δ = $\varphi^3 \approx 4{,}236$.

Σημαντική ιδιότητα: $\varphi^2 = \varphi+1$, από αυτήν προκύπτουν όλες οι υψηλότερες δυνάμεις: $\varphi^3 = 2\varphi+1$, $\varphi^4 = 3\varphi+2$, κ.ο.κ. Κάθε δύναμη του φ εκφράζεται μέσω των προηγούμενων — η αυτο-ομοιότητα διατηρείται σε κάθε κλίμακα.



Οι δυνάμεις του φ: από τον Η΄-Θ΄ Ορισμό ($φ^2$) στον Ι΄ ($φ^3$) και πέρα — η αρμονία δεν σταματά ποτέ.

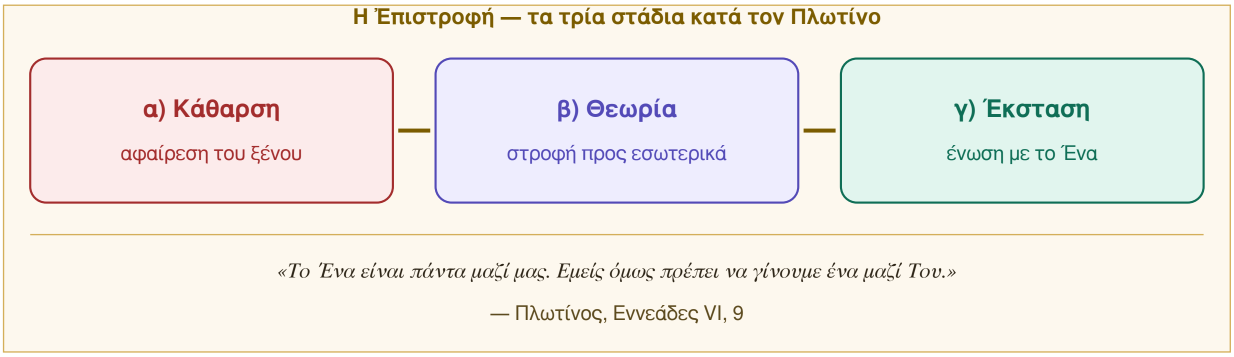
Η Χρυσή Τομή είναι η μαθηματική εικόνα του τριαδικού νόμου σε δράση: το Ένα (Α) δημιουργεί το πολλαπλό (Δ) μέσω του μέσου δεσμού (Β, Γ), και κάθε νέο βήμα ενισχύει γεωμετρικά τη σχέση με την Αρχή. Δεν σταματά στην απλή τριάδα — μπορεί να επεκταθεί σε τέσσερα, πέντε, άπειρα μεγέθη, χωρίς ποτέ να χάσει την αρχική της ομορφιά και αυτο-ομοιότητα.

— 8. Η ΈΠΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΠΛΩΤΙΝΟ —

Η Ἐπιστροφή είναι η κεντρική έννοια στη φιλοσοφία του Πλωτίνου. Ενώ η Πρόοδος (η εκπομπή από το Ένα προς τον κόσμο) είναι η φυσική, γενναιόδωρη κίνηση του Ενός, η Επιστροφή είναι η συνειδητή, επίπονη και ελεύθερη κίνηση της ψυχής πίσω προς το Ένα.

Ο Ι΄ Ορισμός μας δίνει τη μαθηματική βάση για να καταλάβουμε γιατί η Επιστροφή είναι δύσκολη: $Α:Δ = (Α:Β)^3$. Το Ένα (Α) έχει δημιουργήσει το δημιούργημα (Δ) με κυβική σχέση. Άρα η απόσταση που πρέπει να διανύσει η ψυχή (Δ) για να επιστρέψει στο Ένα (Α) είναι γεωμετρικά μεγαλύτερη από την απόσταση που διάνυσε το Ένα κατά την Πρόοδο. Ο Πλωτίνος το λέει ρητά: η ψυχή πρέπει να «τρέξει αντίθετα στο ρεύμα» της δημιουργίας.

Η Χάρις είναι η συνεχής παρουσία του Ενός μέσα μας — το Ένα είναι πάντα παρόν και «τραβάει» την ψυχή. Η Ελευθερία είναι η ικανότητα της ψυχής να ανταποκριθεί σε αυτή την έλξη με όλη της την ύπαρξη. Η Επιστροφή είναι συνέργεια: η Χάρις δίνει τη δυνατότητα, η Ελευθερία την πραγματοποιεί. Όμως επειδή η σχέση είναι κυβική (Ι΄ Ορισμός), η Ελευθερία πρέπει να είναι πολλαπλάσια σε ένταση.



Τα τρία στάδια της Επιστροφής κατά τον Πλωτίνο — η δύσκολη αλλά φυσική κίνηση της ψυχής προς το Ένα.

Η Επιστροφή δεν είναι μια ευχάριστη πνευματική περιπέτεια. Είναι η πιο δύσκολη και ταυτόχρονα η πιο φυσική κίνηση της ψυχής. Δύσκολη, γιατί πρέπει να υπερβεί την κυβική απόσταση που δημιουργήθηκε κατά την Πρόοδο. Φυσική, γιατί η ψυχή στην ουσία της θέλει να επιστρέψει στο Ένα — είναι η βαθύτερη φύση της.

Ο Πλωτίνος το συνοψίζει με μία φράση που συμπυκνώνει όλη τη φιλοσοφία του:

«Τὸ Ἓν ἀεὶ μεθ' ἡμῶν ἐστιν. Ἡμεῖς δὲ δεῖ γενέσθαι ἓν μετ' αὐτοῦ.»

«Το Ένα είναι πάντα μαζί μας. Εμείς όμως πρέπει να γίνουμε ένα μαζί Του.»

— ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ —

Ο Ι΄ Ορισμός ολοκληρώνει την αρχιτεκτονική των ορισμών του Βιβλίου V. Ξεκινήσαμε από τον Α΄ Ορισμό — τη στοιχειώδη σχέση μέρους–όλου — και φτάσαμε εδώ: στη γεωμετρική ενίσχυση της αρμονίας και στη μεταφυσική της θεμελίωση.

Ο Ι΄ Ορισμός δείχνει ότι η αρμονία είναι δυναμική και πολλαπλασιαστική. Όσο πιο μακριά προχωρά η δημιουργία από την Αρχή, τόσο πιο ισχυρή γίνεται η αρχική δωρεά — ώστε το δημιούργημα να μην αποκοπεί από την πηγή του.

Ο τριαδικός νόμος επεκτείνεται: δεν αρκεί μόνο η Τριάδα. Όταν η αρμονία συνεχίζεται, γίνεται κυβική, τετραπλάσια, κ.λπ. — η σχέση με την Αρχή ενισχύεται γεωμετρικά. Αυτός είναι ο λόγος που ο Πλάτων λέει ότι ο κόσμος είναι καλός (ΚΑΛΟΝ): επειδή η αρμονία του δεν είναι απλή, αλλά γεωμετρικά πολλαπλασιασμένη.

ΙΑ′ Ορισμός

Περί Ομολόγων Μεγεθών

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Ομόλογα μεγέθη λέγονται τα μεν ηγούμενα με τα ηγούμενα, τα δε επόμενα με τα επόμενα.

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Ὁμόλογα» — από το «ὁμός» (ίδιος, κοινός) + «λόγος». Δεν σημαίνει απλώς «παρόμοια» αλλά συμφωνούντα κατά τον Λόγο — έχουν την ίδια δομή, την ίδια θέση μέσα στην αρμονία. Η ομολογία είναι κυριολεκτικά «κοινός λόγος» — η μαθηματική έκφραση της βαθιάς ελληνικής πεποίθησης ότι ο κόσμος έχει εσωτερική τάξη όπου τα αντίστοιχα μέρη «συμφωνούν» μεταξύ τους.

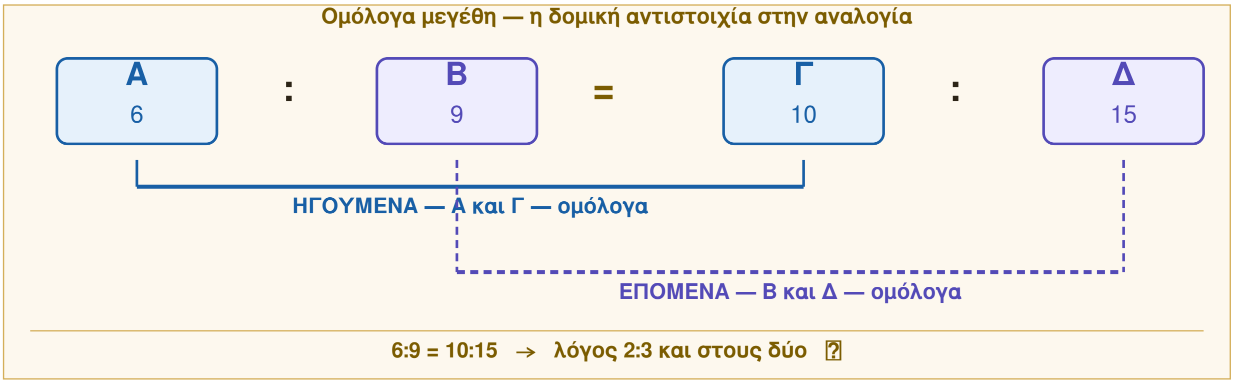
«Ἡγούμενα» — από το ρήμα «ἡγέομαι»: οδηγώ, προηγούμαι. Το ηγούμενο οδηγεί τον λόγο — είναι αυτό που τίθεται πρώτο. «Ἑπόμενα» — από το «ἕπομαι»: ακολουθώ. Η επιλογή αυτών των ρημάτων δεν είναι τυχαία: ο Ευκλείδης χτίζει έναν ορισμό με ρήματα κίνησης. Η αναλογία δεν είναι στατική — έχει κατεύθυνση.

Αξίζει να σημειωθεί η σχέση με τον ΣΤ′ Ορισμό, όπου ορίστηκε ότι μεγέθη με τον ίδιο λόγο καλούνται ανάλογα. Ο ΙΑ′ Ορισμός εσωτερικεύει αυτή τη σχέση: δεν λέει μόνο ότι οι λόγοι είναι ίσοι — λέει ότι τα συγκεκριμένα μεγέθη που παράγουν αυτούς τους ίσους λόγους έχουν ονόματα και θέσεις. Η ανωνυμία της αναλογίας αποκτά πρόσωπο.

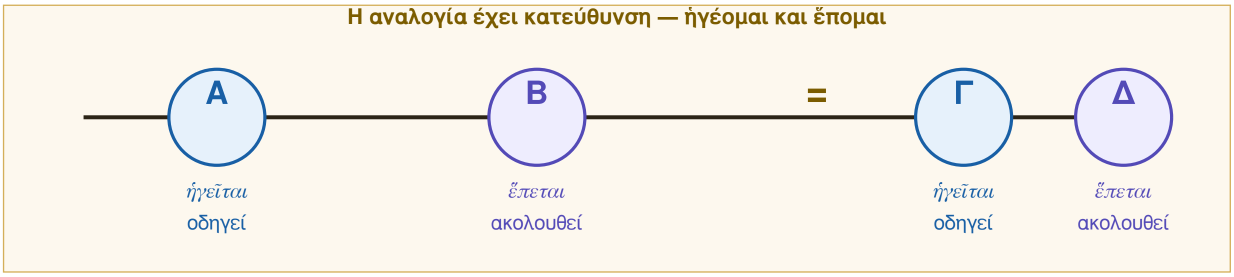
— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Σε μια αναλογία τεσσάρων όρων Α:Β = Γ:Δ, τα ηγούμενα (τα πρώτα μέλη κάθε λόγου) είναι τα Α και Γ — αυτά είναι ομόλογα μεταξύ τους. Τα επόμενα (τα δεύτερα μέλη κάθε λόγου) είναι τα Β και Δ — αυτά είναι ομόλογα μεταξύ τους.

Παράδειγμα: 6:9 = 10:15. Ηγούμενα: 6 και 10 — ομόλογα. Επόμενα: 9 και 15 — ομόλογα. Αν γράψουμε την αναλογία αντίστροφα (9:6 = 15:10), τότε αλλάζουν οι θέσεις των ομόλογων — και ακριβώς γι᾽ αυτό χρειαζόμαστε αυτόν τον ορισμό: για να ξέρουμε τι αλλάζει και τι παραμένει.



Στην αναλογία 6:9 = 10:15, τα Α(6) και Γ(10) είναι ομόλογα ηγούμενα, τα Β(9) και Δ(15) είναι ομόλογα επόμενα.

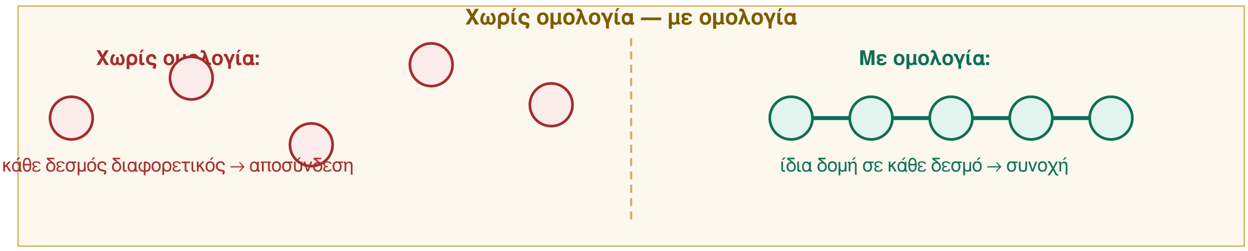


Η αναλογία έχει κατεύθυνση: τα ρήματα ἡγέομαι και ἕπομαι δείχνουν ότι ο Ευκλείδης βλέπει τον λόγο ως κίνηση, όχι ως στατική σχέση.

— ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — ΧΩΡΙΣ ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΤΟ ΠΟΛΛΑΠΛΟ ΔΙΑΛΥΕΤΑΙ —

Φαντάσου τέσσερις ανθρώπους σε μια αλυσίδα. Αν ο καθένας κρατά τον διπλανό του με τον ίδιο τρόπο — ίδια δύναμη, ίδια γωνία — η αλυσίδα παραμένει ενιαία. Αυτή είναι η ομολογία: κάθε δεσμός αντιστοιχεί δομικά στον επόμενο. Αν όμως ο καθένας κρατά τον διπλανό αλλιώς — άλλος από το χέρι, άλλος από τον ώμο, άλλος από τη μέση — η «αλυσίδα» δεν έχει εσωτερική συνοχή και κάποια στιγμή διαλύεται.

Στη φιλοσοφία: το πολλαπλό (ο κόσμος, τα δημιουργήματα) κινδυνεύει να χάσει τη σχέση του με την Αρχή (το Ένα) όταν αναπτύσσεται από βαθμίδα σε βαθμίδα. Αν κάθε βαθμίδα συνδέεται με την προηγούμενη με διαφορετικό τρόπο, ο δεσμός εξασθενεί και τελικά σπάει. Αν όμως κάθε βαθμίδα συνδέεται με την ίδια ομόλογη δομή — το ηγούμενο αντιστοιχεί πάντα στο ηγούμενο, το επόμενο στο επόμενο — τότε ο δεσμός διατηρείται σε κάθε κλίμακα. Το πολλαπλό παραμένει «δεμένο» με την Αρχή γιατί φέρει μέσα του την ίδια δομή.



Χωρίς ομολογία οι δεσμοί είναι ανόμοιοι και αποσυνδέουν. Με ομολογία η ίδια δομή επαναλαμβάνεται σε κάθε κρίκο και η αλυσίδα παραμένει ενιαία.

— ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — Η ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΩΣ ΟΝΤΟΛΟΓΙΚΗ ΑΡΧΗ —

Ο ΙΑʹ Ορισμός είναι επίσης το λεξιλόγιο που επιτρέπει στον Ευκλείδη να μιλήσει με ακρίβεια για τους μετασχηματισμούς αναλογιών στις επόμενες Προτάσεις. Η αντιστροφή (Α:Β = Γ:Δ → Β:Α = Δ:Γ) και η εναλλαγή (Α:Β = Γ:Δ → Α:Γ = Β:Δ) αλλάζουν τη θέση ηγουμένων και επομένων. Χωρίς να ξέρεις ποιο είναι ηγούμενο και ποιο επόμενο, δεν μπορείς να ορίσεις αυτές τις πράξεις.

— ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΛΑΤΩΝΑ —

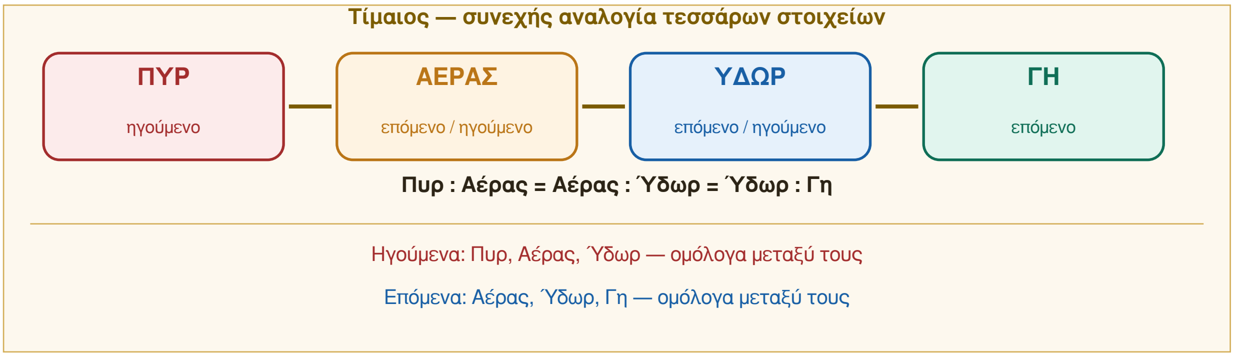
① Τίμαιος (31b–32c)

Στον Τίμαιο ο Δημιουργός δεν ενώνει Πυρ και Γη με τυχαία σχέση. Τα συνδέει με δύο μέσους όρους (Αέρα και Ύδωρ) δημιουργώντας τη συνεχή αναλογία:

«Ἐκ πυρὸς καὶ γῆς ὕδωρ ἀέρα τε ὁ θεὸς ἐν μέσῳ θείς… συνέδησεν… ἀνὰ λόγον.»

Μετάφραση: «Ο Θεός, βάζοντας ανάμεσα σε πυρ και γη ύδωρ και αέρα, τα συνέδεσε κατ᾽ αναλογία.»

Πυρ : Αέρας = Αέρας : Ύδωρ = Ύδωρ : Γη. Αυτή είναι συνεχής αναλογία τριών λόγων. Σε κάθε λόγο υπάρχει ηγούμενο και επόμενο: τα ηγούμενα είναι Πυρ, Αέρας, Ύδωρ — ομόλογα μεταξύ τους, γιατί καθένα «οδηγεί» τον αντίστοιχο λόγο του. Τα επόμενα είναι Αέρας, Ύδωρ, Γη — ομόλογα μεταξύ τους, γιατί καθένα «ακολουθεί» στον αντίστοιχο λόγο του. Ο Πλάτων ονομάζει αυτόν τον δεσμό «κάλλιστον» — και ο ΙΑʹ Ορισμός δίνει το μαθηματικό του όνομα: ομολογία.



Στη συνεχή αναλογία του Τίμαιου, κάθε στοιχείο παίζει διπλό ρόλο: επόμενο στον προηγούμενο λόγο και ηγούμενο στον επόμενο.

② Η Διαιρεμένη Γραμμή — Πολιτεία ΣΤ´ (509d–511e)

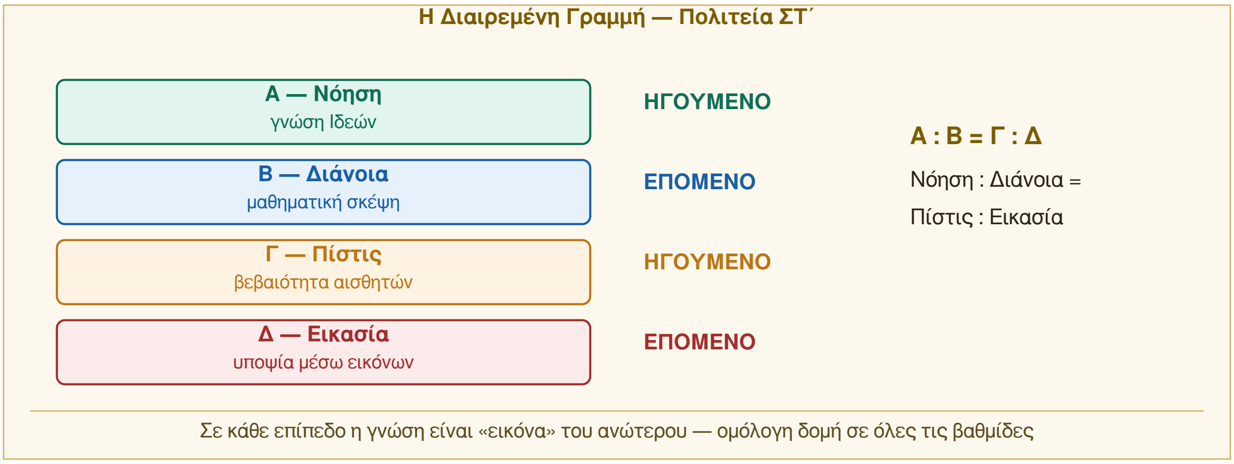
Ο Πλάτων χωρίζει τη γραμμή της γνώσης σε τέσσερα τμήματα — δύο για τον νοητό κόσμο και δύο για τον αισθητό. Στον νοητό κόσμο: η νόηση (γνώση των Ιδεών) και η διάνοια (μαθηματική σκέψη που χρησιμοποιεί υποθέσεις). Στον αισθητό κόσμο: η πίστις (βεβαιότητα για τα αισθητά αντικείμενα) και η εικασία (υποψία, προσέγγιση μέσω εικόνων και σκιών).

Η αναλογία είναι: νόηση : διάνοια = πίστις : εικασία. Τα ομόλογα ηγούμενα είναι νόηση και πίστις — και τα δύο αφορούν τα «πράγματα καθεαυτά» στο επίπεδό τους. Τα ομόλογα

επόμενα είναι διάνοια και εικασία — και τα δύο αφορούν «εικόνες» ή «υποθέσεις» των ανώτερων.

Το εκπληκτικό είναι ότι η διάνοια στον νοητό κόσμο κατέχει ανάλογη θέση με αυτή που κατέχει η εικασία στον αισθητό — και οι δύο χειρίζονται «εικόνες» του ανώτερού τους. Άρα ο νους που κάνει μαθηματικά βρίσκεται σε ομόλογη σχέση με τον νου που βλέπει σκιές. Αυτό δεν ταπεινώνει τα μαθηματικά — αποκαλύπτει ότι κάθε επίπεδο γνώσης έχει την ίδια εσωτερική δομή.

Εδώ η ομολογία γίνεται επιστημολογική αρχή: η γνώση είναι δυνατή ακριβώς επειδή τα επίπεδα του πραγματικού έχουν ομόλογη δομή. Ο νους δεν «άλτεται» από επίπεδο σε επίπεδο — αναγνωρίζει σε κάθε επίπεδο την ίδια δομή που φέρει μέσα του. Και αυτή η αναγνώριση είναι η ανάμνηση (ἀνάμνησις) με μαθηματική θεμελίωση: η ψυχή θυμάται το Ένα γιατί η δομή της είναι ομόλογη προς αυτό.



Η Διαιρεμένη Γραμμή: νόηση:διάνοια = πίστις:εικασία. Σε κάθε ζεύγος το επόμενο είναι «εικόνα» του ηγούμενου — ομόλογη δομή σε νοητό και αισθητό κόσμο.

③ Η κλίμακα της ομορφιάς της Διοτίμας — Συμπόσιο (210a–211c)

Η Διοτίμα είναι η ιέρεια από τη Μαντινεία που ο Σωκράτης παρουσιάζει στο Συμπόσιο ως δασκάλα του στα ερωτικά. Η κλίμακα που περιγράφει λέγεται ἐπανάβασις — ανάβαση. Ξεκινά από το ορατό και ανεβαίνει σταδιακά στο νοητό:

Η ομορφιά ενός σώματος — ο εραστής αγαπά ένα συγκεκριμένο σώμα. Η ομορφιά όλων των σωμάτων — συνειδητοποιεί ότι η ομορφιά δεν ανήκει σε ένα σώμα. Η ομορφιά των ψυχών — καταλαβαίνει ότι η εσωτερική ομορφιά υπερβαίνει την εξωτερική. Η ομορφιά των νόμων και των πράξεων — βλέπει ομορφιά στην ηθική τάξη. Η ομορφιά των επιστημών — βλέπει ομορφιά στην αλήθεια των ιδεών. Και τέλος η Ιδέα του Ωραίου — το απόλυτο Ωραίο, που δεν εξαρτάται από τίποτα.

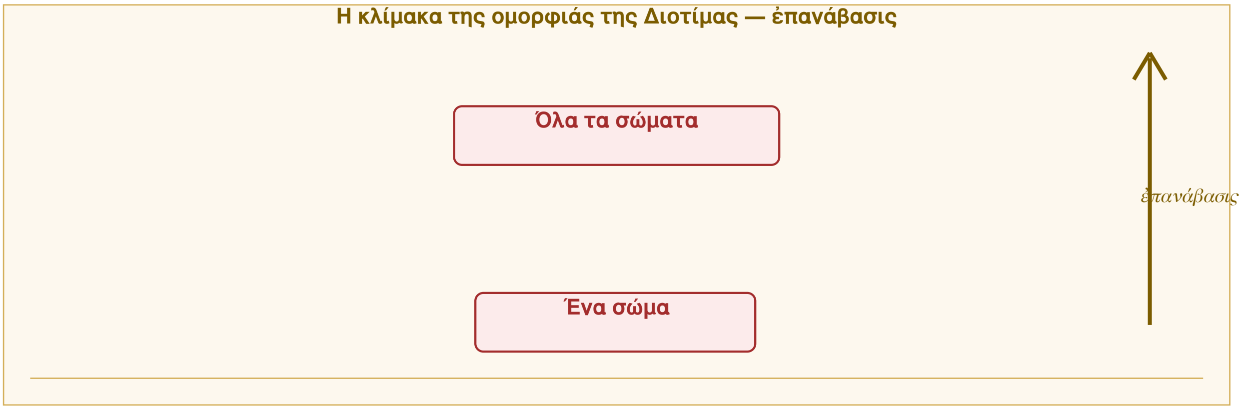
Η ομολογία εδώ σημαίνει: κάθε σκαλί της ανάβασης έχει ίδια δομή με το επόμενο. Σε κάθε επίπεδο ο εραστής αναγνωρίζει κάτι που ήδη γνωρίζει από κατώτερο επίπεδο — αλλά



τώρα το βλέπει καθαρότερα, πιο αφηρημένα, πιο καθολικά. Αυτό είναι που κάνει την ανάβαση δυνατή: δεν χρειάζεται «άλμα» — αρκεί η αναγνώριση της ίδιας δομής σε ανώτερο επίπεδο. Και αυτή η ανο



γία.



Η ἐπανάβασις της Διοτίμας: κάθε σκαλί φέρει ομόλογη δομή με το προηγούμενο — γι' αυτό η ανάβαση είναι αναγνώριση, όχι άλμα.

④ Φίληβος (16c–17a)

Στον Φίληβο ο Πλάτωνας μιλάει για την τέχνη της διαλεκτικής και λέει ότι πρέπει να βλέπουμε το Ένα (ενότητα), το Άπειρο (πολλαπλότητα) και τον αριθμό (μέτρο) που βρίσκεται ανάμεσά τους. Πάλι ομόλογη δομή: το ηγούμενο (ενότητα) αντιστοιχεί σε άλλο ηγούμενο, και το επόμενο (πολλαπλότητα) σε άλλο επόμενο, μέσω του μέσου όρου.

— ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΤΟΝ ΠΛΩΤΙΝΟ —

Ο Πλωτίνος παίρνει την ομολογία και την κάνει μεταφυσική αρχή της εκπομπής. Το Ένα εκπέμπει τον Νου, ο Νους εκπέμπει την Ψυχή, η Ψυχή εκπέμπει τον υλικό κόσμο. Σε αυτή την ιεραρχία κάθε βαθμίδα είναι ομόλογη με την προηγούμενη. Η ομολογία επιτρέπει στην ψυχή να επιστρέψει στο Ένα γιατί αναγνωρίζει μέσα της την ίδια δομή που υπάρχει στον Νου και στο Ένα. Αυτή η αναγνώριση είναι η πλατωνική ανάμνηση με μαθηματική θεμελίωση: η ψυχή θυμάται το Ένα ακριβώς γιατί η δομή της είναι ομόλογη προς αυτό.

— ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ —

Μουσική

Ντο(C4):Σολ(G4) = Φα(F4):Ντο(C5) — λόγος πέμπτης 3:2 και στους δύο. Τα ηγούμενα Ντο(C4) και Φα(F4) είναι ομόλογα, τα επόμενα Σολ(G4) και Ντο(C5) είναι ομόλογα. Η ομολογία εξηγεί γιατί η ίδια αρμονική σχέση ακούγεται ίδια σε διαφορετικές οκτάβες.

Γεωμετρία — Όμοια τρίγωνα

Τρίγωνο 1: πλευρές 6 και 8. Τρίγωνο 2: πλευρές 9 και 12. Αναλογία: 6:8 = 9:12 (λόγος 3:4). Τα 6 και 9 είναι ομόλογα (αντίστοιχες πλευρές), τα 8 και 12 είναι ομόλογα. Η ομολογία είναι ακριβώς αυτό που σημαίνει «όμοια τρίγωνα».

Φύση — Αυτο-ομοιότητα

Σε ένα φύλλο: κεντρική νεύρωση (Α) : πλευρική νεύρωση (Β). Στο κλαδί: κεντρικό κλαδί (Γ) : πλευρικό κλαδί (Δ). Α:Β = Γ:Δ — η κεντρική νεύρωση αντιστοιχεί ομόλογα στο κεντρικό κλαδί. Αυτή είναι η αυτο-ομοιότητα που βλέπουμε στη φύση: το μικρό φέρει την ίδια δομή με το μεγάλο.

— ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ —

Ο ΙΑ′ Ορισμός είναι ο πιο «αθόρυβος» της σειράς — δεν εισάγει νέα μαθηματική δομή, αλλά δίνει ονόματα σε αυτό που ήδη υπάρχει. Και αυτό ακριβώς είναι η φιλοσοφική του σημασία: ότι στην ελληνική σκέψη η ονοματοδοσία δεν είναι τυπική — είναι πράξη αναγνώρισης.

Η ομολογία είναι αυτό που κάνει τον κόσμο κόσμο και όχι χάος — αυτό που κάνει τη γνώση δυνατή και την Επιστροφή εφικτή.

ΙΒʹ Ορισμός

Περί Εναλλάξ Λόγου

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Ο εναλλάξ λόγος είναι η λήψη του ηγουμένου προς το ηγούμενο και του επομένου προς το επόμενο.

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Ἐναλλάξ» — από το «ἐν» + «ἄλλος». Κυριολεκτικά: εναλλασσόμενος, με εναλλαγή. Δεν σημαίνει αντιστροφή — σημαίνει εναλλαγή της γωνίας σύγκρισης. Το πράγμα παραμένει το ίδιο, αλλάζει ο τρόπος που το κοιτάς.

«Λῆψις» — λήψη, από το «λαμβάνω». Δεν είναι τυχαία η λέξη. Ο Ευκλείδης δεν λέει «ορισμός» ή «σχέση» — λέει λήψη: ενεργητική πράξη. Κάποιος λαμβάνει τον λόγο — δεν τον παρατηρεί παθητικά. Η αλήθεια δεν πέφτει από μόνη της — κατακτάται.

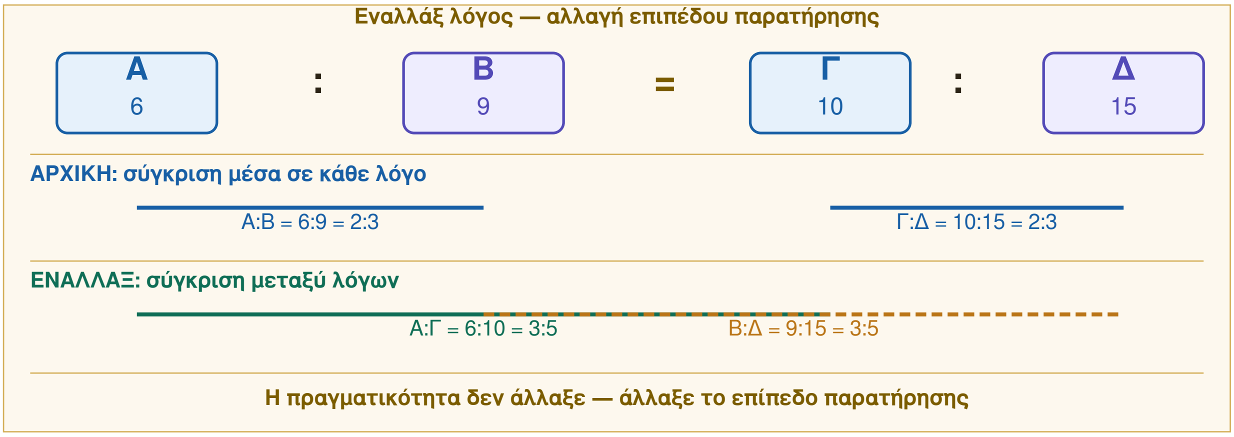
«Τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον» — η σύγκριση δεν γίνεται πια μέσα στον λόγο (ηγούμενο με επόμενο) αλλά μεταξύ των λόγων (ηγούμενο με ηγούμενο). Αυτή η μετακίνηση προϋποθέτει τον ΙΑʹ Ορισμό — χωρίς ονόματα δεν υπάρχει εναλλαγή.

— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Αν έχουμε Α:Β = Γ:Δ, ο εναλλάξ λόγος δίνει: Α:Γ = Β:Δ.

Παράδειγμα: 6:9 = 10:15. Εναλλάξ: 6:10 = 9:15 — και οι δύο λόγοι 3:5. ✓

Στην αρχική αναλογία συγκρίνεις μέσα σε κάθε ζεύγος — το 6 με το 9, το 10 με το 15. Στην εναλλάξ συγκρίνεις μεταξύ των ζευγών — το 6 με το 10, το 9 με το 15. Η πραγματικότητα δεν άλλαξε. Άλλαξε το επίπεδο παρατήρησης.



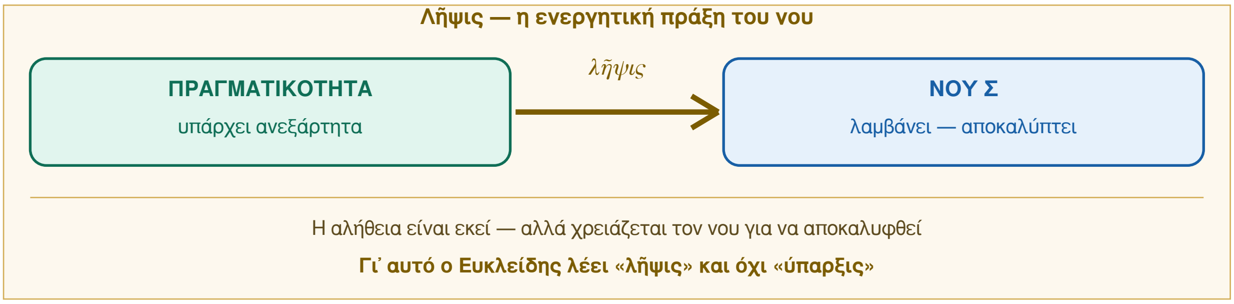
Αρχική αναλογία: σύγκριση μέσα στον λόγο. Εναλλάξ: σύγκριση μεταξύ λόγων. Η ίδια πραγματικότητα — δύο αληθινές αναγνώσεις.

— ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — Η ΛΗΨΙΣ ΚΑΙ ΤΟ ΒΑΘΟΣ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ —

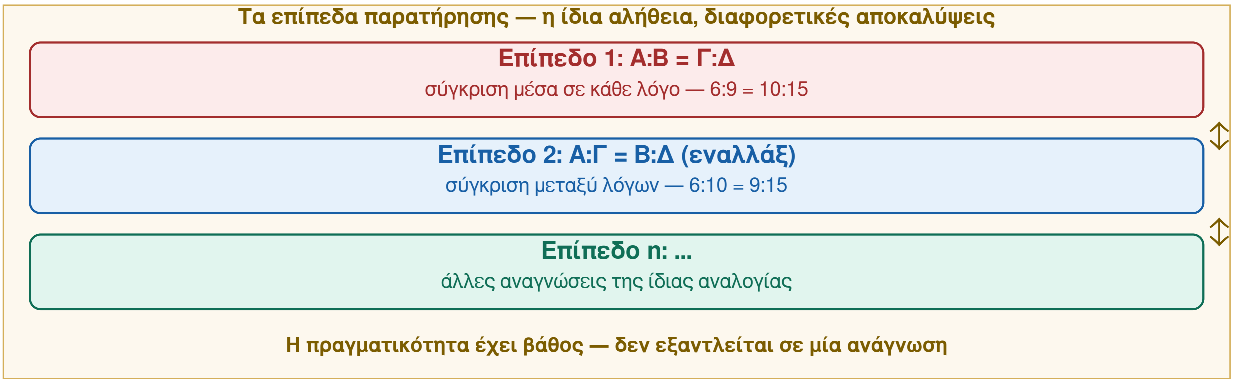
Ο ΙΒ′ Ορισμός είναι ο πρώτος που ορίζει μια πράξη πάνω στην αναλογία — όχι απλώς μια ιδιότητα. Μέχρι τώρα οι ορισμοί περιέγραφαν. Τώρα ο Ευκλείδης επιτρέπει μια κίνηση.

Και αυτή η κίνηση αποκαλύπτει κάτι θεμελιακό: μια αναλογία περιέχει περισσότερες από μία αλήθειες ταυτόχρονα. Α:Β = Γ:Δ λέει κάτι. Α:Γ = Β:Δ λέει κάτι διαφορετικό — αλλά εξίσου αληθινό και εξίσου απορρέον από την ίδια σχέση.

Αυτό σημαίνει ότι η πραγματικότητα έχει βάθος — δεν εξαντλείται σε μία ανάγνωση. Και η ελευθερία να αλλάζεις επίπεδο παρατήρησης δεν είναι αυθαιρεσία — γιατί κάθε γωνία αποκαλύπτει κάτι αληθινό που ήταν εκεί.



Η λῆψις: η πραγματικότητα υπάρχει ανεξάρτητα, αλλά χρειάζεται τον νου για να αποκαλυφθεί.



Τα επίπεδα παρατήρησης: η ίδια αναλογία αποκαλύπτει διαφορετικές αλήθειες ανάλογα με το επίπεδο από το οποίο την κοιτάς.

— ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Αν η πραγματικότητα δεν άλλαξε όταν άλλαξε η οπτική, αυτό σημαίνει ότι η πραγματικότητα είναι ανεξάρτητη από τον παρατηρητή. Αυτή είναι η βαθύτερη πλατωνική θέση: ο κόσμος των σχέσεων — των λόγων, των αναλογιών — δεν εξαρτάται από το αν τον βλέπεις ή όχι. Υπήρχε πριν τον δεις. Θα υπάρχει μετά.

Αλλά — και εδώ είναι η λεπτότητα — χρειάζεσαι εσένα για να τον αποκαλύψεις. Η αλήθεια είναι εκεί. Αλλά χωρίς τη λήψη — χωρίς τη συνειδητή πράξη του να κοιτάξεις — παραμένει αθέατη. Αυτό δεν είναι αντίφαση. Είναι η σχέση μεταξύ υπαρκτής αλήθειας και γνωρίζοντος νου.

Στον Πλωτίνο το Ένα εκπέμπει τον Νου, ο Νους την Ψυχή, η Ψυχή τον κόσμο. Μπορείς να διαβάσεις αυτή την ιεραρχία κατά τον λόγο: Ένα:Νους = Ψυχή:Κόσμος. Αλλά μπορείς και εναλλάξ: Ένα:Ψυχή = Νους:Κόσμος. Η δεύτερη ανάγνωση αποκαλύπτει πώς το Ένα σχετίζεται απευθείας με κάθε βαθμίδα — όχι μόνο μέσω της αμέσως επόμενης.

— ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ —

Μουσική

Αν πέμπτη:τέταρτη = τρίτη:x, ο εναλλάξ λόγος επιτρέπει να βρεις τη σχέση μεταξύ των διαστημάτων, όχι μόνο μέσα σε κάθε ένα. Αυτό χρησιμοποιούσαν οι Πυθαγόρειοι για να χτίζουν την αρμονική κλίμακα.

Γεωμετρία

Σε δύο όμοια τρίγωνα, ο εναλλάξ λόγος επιτρέπει να συγκρίνεις απευθείας αντίστοιχες πλευρές μεταξύ των τριγώνων — όχι μόνο τις πλευρές του ίδιου τριγώνου. Είναι θεμέλιο της θεωρίας ομοιότητας και χρησιμοποιείται εκτενώς στο Βιβλίο VI.

Φιλοσοφία

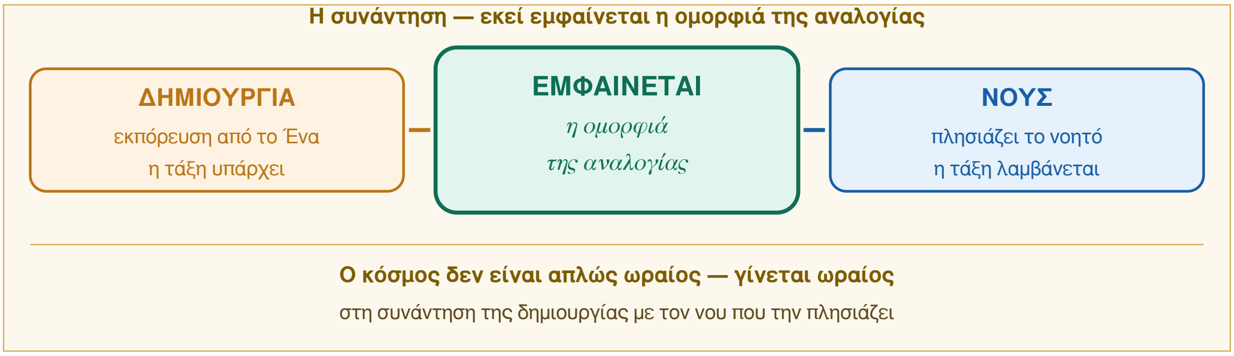
Στη Διαιρεμένη Γραμμή: νοητό:αισθητό = αλήθεια:πίστη. Εναλλάξ: νοητό:αλήθεια = αισθητό:πίστη. Η δεύτερη ανάγνωση δείχνει ότι κάθε κόσμος αντιστοιχεί στον τρόπο γνώσης του — όχι απλώς ότι οι κόσμοι διαφέρουν μεταξύ τους.

— ΚΑΤΑΚΛΕΙΣ — Η ΣΥΝΑΝΤΗΣΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΚΑΙ ΝΟΥ —

Ο κόσμος εκπορεύεται από το Ένα. Η τάξη του, οι αναλογίες του, η δομή του υπάρχουν ανεξάρτητα από οποιονδήποτε παρατηρητή. Αλλά η ομορφιά αυτής της τάξης δεν αποκαλύπτεται χωρίς τον νου που την πλησιάζει.

Και δεν αρκεί οποιοσδήποτε νους. Χρειάζεται ο νους που πλησιάζει το νοητό — που ανεβαίνει στην κλίμακα, που ασκεί τη λήψη, που αλλάζει επίπεδο παρατήρησης ανάλογα με αυτό που χρειάζεται να δει.

Τότε συμβαίνει κάτι που δεν είναι ούτε καθαρά υποκειμενικό ούτε καθαρά αντικειμενικό: η ομορφιά της αναλογίας εμφαίνεται. Αναδύεται στη συνάντηση.



Η συνάντηση δημιουργίας και νου: εκεί εμφαίνεται η ομορφιά της αναλογίας.

Ο κόσμος δεν είναι απλώς ωραίος. Γίνεται ωραίος — αναδύεται ως ωραίος — στη συνάντηση της δημιουργίας με τον νου που την πλησιάζει.

ΙΓ′ Ορισμός

Περί Ανάπαλιν Λόγου — και οι τέσσερις αναγνώσεις της αναλογίας

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸν ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Ανάπαλιν λόγος είναι η λήψη του επομένου ως ηγουμένου προς το ηγούμενο ως επόμενο.

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Ἀνάπαλιν» — από το «ἀνά» + «πάλιν»: πάλι πίσω, ανάποδα, προς την αντίθετη κατεύθυνση. Δεν είναι τυχαία επιλογή — είναι ρήμα κίνησης. Ο Ευκλείδης δεν λέει «αντίστροφος λόγος» αλλά «ανάπαλιν λόγος». Το «αντίστροφος» περιγράφει μια θέση· το «ανάπαλιν» περιγράφει μια κίνηση. Και η κίνηση είναι πάντα πλουσιότερη από τη θέση.

«Ὡς ἡγουμένου» και «ὡς ἑπομένου» — προσέξτε τα «ὡς»: ως ηγούμενο, ως επόμενο. Ο Ευκλείδης δεν λέει ότι το επόμενο είναι ηγούμενο — λέει ότι λαμβάνεται ως ηγούμενο. Είναι λεπτή αλλά καθοριστική διάκριση: η οντολογική θέση δεν αλλάζει. Αλλάζει η γωνία λήψης.

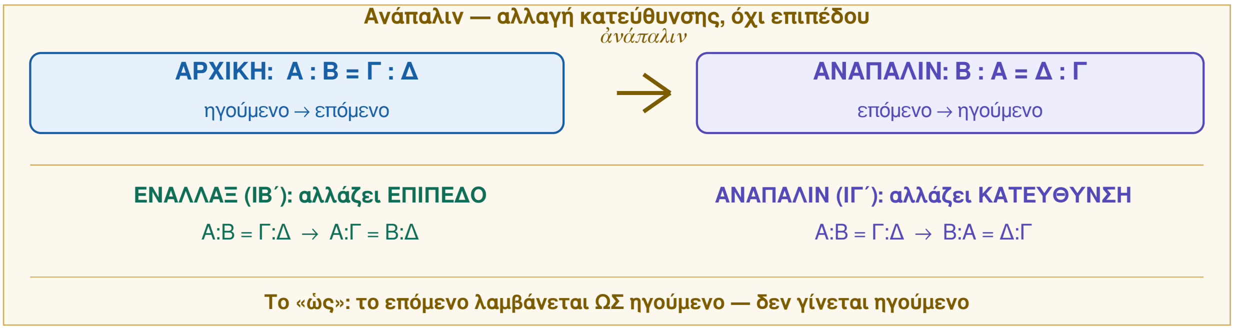
— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Αν Α:Β = Γ:Δ, ο ανάπαλιν λόγος δίνει: Β:Α = Δ:Γ.

Παράδειγμα: 6:9 = 10:15. Ανάπαλιν: 9:6 = 15:10 — και οι δύο λόγοι 3:2. ✓

Ο λόγος αντιστράφηκε: από 2:3 έγινε 3:2. Αλλά η ισότητα της αναλογίας διατηρήθηκε. Η πραγματικότητα δεν άλλαξε — άλλαξε η κατεύθυνση από την οποία την κοιτάς.

Αυτό είναι η θεμελιακή διαφορά από τον ΙΒ′ Ορισμό: ο εναλλάξ αλλάζει επίπεδο παρατήρησης (Α:Β = Γ:Δ → Α:Γ = Β:Δ), ο ανάπαλιν αλλάζει κατεύθυνση (Α:Β = Γ:Δ → Β:Α = Δ:Γ). Είναι δύο εντελώς διαφορετικές πράξεις πάνω στην ίδια πραγματικότητα.



Εναλλάξ: αλλάζει επίπεδο. Ανάπαλιν: αλλάζει κατεύθυνση. Το «ώς» δείχνει ότι η θέση δεν αλλάζει οντολογικά — αλλάζει η γωνία λήψης.

— ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — ΟΙ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΑΛΗΘΙΝΕΣ ΑΝΑΓΝΩΣΕΙΣ —

Ο ΙΒ′ και ο ΙΓ′ Ορισμός μαζί αποκαλύπτουν κάτι θεμελιακό: μια αναλογία δεν έχει μία ανάγνωση — έχει τέσσερις. Και όλες εξίσου αληθινές, όλες απορρέουσες από την ίδια σχέση.

① Η αρχική ανάγνωση — κατά τον ΣΤ΄ Ορισμό

Α:Β = Γ:Δ. Συγκρίνεις μέσα σε κάθε λόγο — ηγούμενο με επόμενο. Βλέπεις πώς το Α σχετίζεται με το Β, και πώς το Γ σχετίζεται με το Δ. Παράδειγμα: 6:9 = 10:15 — λόγος 2:3 και στους δύο.

② Η εναλλάξ ανάγνωση — κατά τον ΙΒ΄ Ορισμό

Α:Γ = Β:Δ. Συγκρίνεις μεταξύ λόγων — ηγούμενο με ηγούμενο, επόμενο με επόμενο. Αλλάζεις επίπεδο παρατήρησης. Παράδειγμα: 6:10 = 9:15 — λόγος 3:5 και στους δύο.

③ Η ανάπαλιν ανάγνωση — κατά τον ΙΓ΄ Ορισμό

Β:Α = Δ:Γ. Αντιστρέφεις την κατεύθυνση κάθε λόγου — το επόμενο λαμβάνεται ως ηγούμενο. Δεν αλλάζεις επίπεδο — αλλάζεις κατεύθυνση. Κινείσαι προς τα πίσω στον ίδιο δρόμο. Παράδειγμα: 9:6 = 15:10 — λόγος 3:2 και στους δύο.

④ Η σύνθετη ανάγνωση — εναλλάξ και ανάπαλιν μαζί

Γ:Α = Δ:Β. Εφαρμόζεις και τις δύο πράξεις ταυτόχρονα: αλλάζεις και επίπεδο και κατεύθυνση. Βλέπεις την αναλογία από την εντελώς αντίθετη γωνία. Παράδειγμα: 10:6 = 15:9 — λόγος 5:3 και στους δύο.

Οι τέσσερις αληθινές αναγνώσεις μιας αναλογίας

① Αρχική	Α:Β = Γ:Δ	6:9 = 10:15	σύγκριση μέσα σε κάθε λόγο	ΣΤ΄ Ορισμός
② Εναλλάξ	Α:Γ = Β:Δ	6:10 = 9:15	αλλαγή επιπέδου παρατήρησης	ΙΒ΄ Ορισμός
③ Ανάπαλιν	Β:Α = Δ:Γ	9:6 = 15:10	αλλαγή κατεύθυνσης	ΙΓ΄ Ορισμός
④ Σύνθετη	Γ:Α = Δ:Β	10:6 = 15:9	αλλαγή επιπέδου ΚΑΙ κατεύθυνσης	ΙΒ΄ + ΙΓ΄

Όλες απορρέουν από την ίδια σχέση — όλες εξίσου αληθινές

Οι τέσσερις αναγνώσεις: η αλήθεια μιας σχέσης δεν εξαντλείται από καμία μία ανάγνωση. Χρειάζονται και οι τέσσερις για να αποκαλυφθεί το πλήρες βάθος της.

— ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — Ο ΑΝΑΠΑΛΙΝ ΛΟΓΟΣ ΩΣ ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ —

Εδώ ο ΙΓ΄ Ορισμός αγγίζει κάτι που ξεπερνά τα μαθηματικά. Ο ανάπαλιν λόγος είναι η μαθηματική εικόνα της Επιστροφής (ἐπιστροφή) του Πλωτίνου.

Η Πρόοδος στον Πλωτίνο είναι Α:Β — το Ένα εκπέμπει, κινείται προς τα έξω, γεννά τον Νου, την Ψυχή, τον κόσμο. Η Επιστροφή είναι Β:Α — το δημιούργημα στρέφεται πίσω, κινείται προς τα μέσα, επιστρέφει προς την πηγή. Ο ανάπαλιν λόγος δεν είναι απλώς μαθηματική τεχνική. Είναι η δομή της Επιστροφής.

Το πρώτο μέρος — η σχέση υπάρχει ήδη

Φαντάσου κάποιον που λέει: «Δεν μπορώ να επιστρέψω στην πηγή γιατί έχω χαθεί — δεν υπάρχει πια σχέση μεταξύ εμού και του Ενός.»

Αυτό είναι λάθος. Και ο ανάπαλιν λόγος το αποδεικνύει μαθηματικά. Αν Α:Β = Γ:Δ ισχύει, τότε Β:Α = Δ:Γ ισχύει αυτόματα — χωρίς καμία πρόσθετη προϋπόθεση. Δεν χρειάζεται να «φτιάξεις» τη σχέση για να κινηθείς αντίστροφα. Η σχέση ήδη υπάρχει και στις δύο κατευθύνσεις.

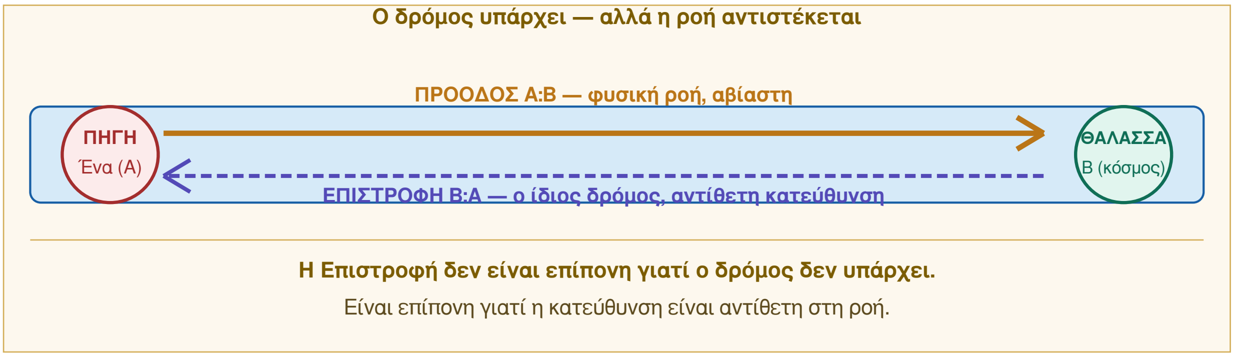
Μεταφράζοντας στη γλώσσα του Πλωτίνου: το δημιούργημα (Β) δεν έχει χάσει τη σχέση του με το Ένα (Α). Η σχέση Β:Α υπάρχει ήδη — γιατί υπάρχει η Α:Β. Δεν χρειάζεται να «ξαναφτιαχτεί» ο δεσμός. Ο δεσμός είναι εκεί. Αυτό είναι ελπιδοφόρο: η Επιστροφή δεν είναι επίπονη γιατί ο δρόμος δεν υπάρχει. Ο δρόμος υπάρχει πάντα — χαραγμένος στη δομή της πραγματικότητας.

Το δεύτερο μέρος — η ροή αντιστέκεται

Σκέψου ένα ποτάμι. Το νερό ρέει από την πηγή προς τη θάλασσα — αυτή είναι η Πρόοδος: φυσική, αβίαστη, ακολουθεί τη βαρύτητα. Αν θέλεις να κολυμπήσεις από τη θάλασσα πίσω στην πηγή, δεν σου λείπει ο δρόμος — ο δρόμος είναι το ίδιο ποτάμι. Αυτό που σου αντιστέκεται είναι η ροή.

Έτσι και η Επιστροφή: ο δρόμος Β:Α υπάρχει — αλλά η ροή της δημιουργίας κινείται από Α προς Β, από το Ένα προς το πολλαπλό. Η Επιστροφή κινείται αντίθετα σε αυτή τη ροή. Δεν παλεύεις με την απουσία δρόμου — παλεύεις με την παρουσία ροής.

Αυτό εξηγεί γιατί ο Πλωτίνος λέει ότι η Επιστροφή απαιτεί άσκηση, κάθαρση, συνειδητή προσπάθεια. Όχι γιατί κάτι έχει σπάσει — αλλά γιατί η φυσική κατεύθυνση της ύλης, των παθών, της πολλαπλότητας, τραβάει προς τα κάτω.



Η Πρόοδος ακολουθεί τη ροή — φυσική και αβίαστη. Η Επιστροφή κολυμπά αντίθετα — ο δρόμος υπάρχει, η ροή αντιστέκεται.

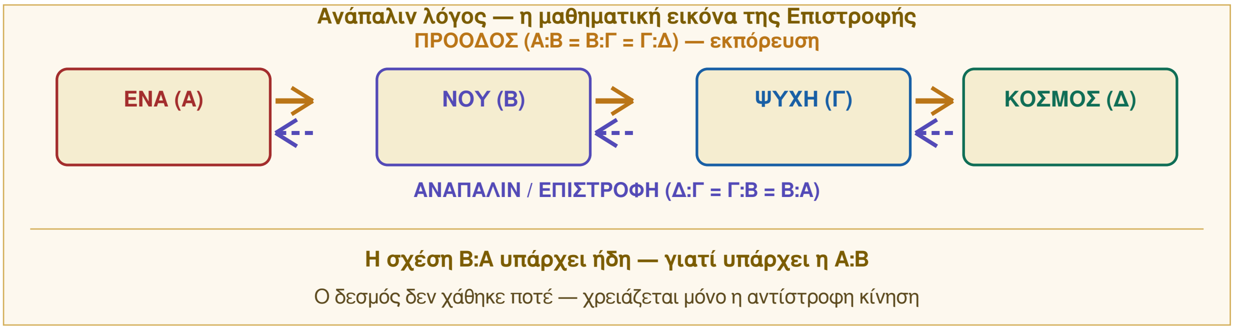
Η σύνθεση

Η πρόταση «η Επιστροφή δεν είναι επίπονη γιατί η σχέση δεν υπάρχει — είναι επίπονη γιατί η κατεύθυνση είναι αντίθετη στη ροή» λέει δύο πράγματα μαζί:

Πρώτον — μην απελπίζεσαι: η σχέση με το Ένα δεν χάθηκε ποτέ. Η αναλογία Β:Α υπάρχει πάντα, γιατί υπάρχει η Α:Β.

Δεύτερον — μην αυταπατάσαι: η ύπαρξη του δρόμου δεν σημαίνει ότι η διαδρομή είναι εύκολη. Η ροή της δημιουργίας κινείται αντίθετα — και αυτό απαιτεί δύναμη, συνείδηση και επιλογή.

Το ανάπαλιν δεν σου δίνει έτοιμη την Επιστροφή. Σου δίνει κάτι πιο πολύτιμο: τη βεβαιότητα ότι ο δρόμος υπάρχει.



Η ιεραρχία του Πλωτίνου: Πρόοδος (Α:Β:Γ:Δ) και Επιστροφή (Δ:Γ:Β:Α) — ο ίδιος δρόμος, η ίδια σχέση, αντίθετη κατεύθυνση.

— ΚΑΤΑΚΛΕΙΣ —

Ο ΙΓʹ Ορισμός είναι ο τελευταίος της σειράς που αναλύσαμε. Και δεν είναι τυχαίο ότι κλείνει με την Επιστροφή.

Το Βιβλίο V ξεκίνησε από τον Αʹ Ορισμό — το μέρος του όλου. Πέρασε από τον λόγο, την αναλογία, την ελάχιστη αρμονία, τον τριαδικό νόμο, την ομολογία, τον εναλλάξ λόγο. Και φτάνει εδώ: στην αντίστροφη κίνηση — στον ανάπαλιν λόγο.

Αυτές οι τέσσερις αναγνώσεις μαζί — αρχική, εναλλάξ, ανάπαλιν, σύνθετη — δείχνουν ότι η πραγματικότητα έχει βάθος και κατεύθυνση, και αμφότερα είναι αναστρέψιμα χωρίς να χαθεί η αλήθεια.

Αυτή είναι η μαθηματική θεμελίωση της ελευθερίας της σκέψης: μπορείς να κινείσαι οριζόντια και κάθετα, προς τα εμπρός και προς τα πίσω — και η αλήθεια παραμένει.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ · ΣΤΟΙΧΕΙΑ · ΒΙΒΛΙΟ V

ΙΔ΄, ΙΕ΄ και ΙΣΤ΄ Ορισμοί

Σύνθεσις — Διαίρεσις — Αναστροφή Τρεις κινήσεις γύρω από έναν λόγο

⍰⍰⍰ ΙΔ΄ ΟΡΙΣΜΟΣ — ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΛΟΓΟΥ ⍰⍰⍰

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Σύνθεσις λόγου είναι η λήψη του ηγουμένου μαζί με το επόμενο, ως προς αυτό το ίδιο το επόμενο.

Αν Α:Β, τότε σύνθεσις = (Α+Β):Β

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Σύνθεσις» — από το «σύν» + «τίθημι»: τίθεμαι μαζί, συνθέτω. Δεν είναι απλή αριθμητική πρόσθεση — είναι ένωση δύο όρων σε ένα νέο σύνολο που διατηρεί τη σχέση του με τον έναν εξ αυτών.

«Μετὰ τοῦ ἑπομένου» — μαζί με το επόμενο. Το ηγούμενο δεν απορροφά το επόμενο — τα δύο ενώνονται διατηρώντας τη διάκρισή τους. Η σύνθεση δεν είναι συγχώνευση — είναι συνύπαρξη.

«Ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον» — το «αὐτό» είναι έμφαση: το νέο σύνολο (Α+Β) συγκρίνεται όχι με κάτι εξωτερικό αλλά με τον ίδιο τον Β που ήδη ανήκει σε αυτό. Το μέτρο είναι εσωτερικό.

— ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Παράδειγμα: Α=5, Β=3. Σύνθεσις = (5+3):3 = 8:3. Ο αρχικός λόγος ήταν 5:3. Ο νέος λόγος είναι 8:3. Το ηγούμενο άλλαξε — δεν είναι πια μόνο το Α αλλά το Α μαζί με τον Β.

Αυτό είναι η θεμελιακή διαφορά από τους προηγούμενους ορισμούς: ο ΙΒ΄ (εναλλάξ) άλλαξε επίπεδο, ο ΙΓ΄ (ανάπαλιν) άλλαξε κατεύθυνση. Ο ΙΔ΄ δημιουργεί κάτι νέο — ένα σύνολο που δεν υπήρχε πριν — και το θέτει σε σχέση με ένα από τα μέρη που το συγκροτούν.

— Ο ΑΡΧΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ ΣΥΝ ΜΙΑ ΜΟΝΑΔΑ —

Υπάρχει μια παρατήρηση που αποκαλύπτει την εσωτερική δομή της σύνθεσης:

$$(A+B):B = A/B + B/B = A/B + 1$$

Η σύνθεσις δεν δημιουργεί έναν εντελώς νέο, άγνωστο λόγο. Δημιουργεί τον αρχικό λόγο συν μία μονάδα. Και αυτή η μονάδα δεν έρχεται από αλλού — είναι η συνεισφορά του ίδιου του Β στον εαυτό του: Β/Β = 1. Το Β δίνει τον εαυτό του ως μέτρο — και με αυτή την

αυτοπροσφορά ο λόγος μεγαλώνει κατά ένα.

Κάθε ανάπτυξη που δεν χάνει τον εαυτό της προχωράει κατά μία μονάδα κάθε φορά — όχι με άλμα, αλλά με βήμα. Και το βήμα είναι ισάξιο με το μέτρο.

— Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΩΣ ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΝΘΕΣΙΣ —

Υπάρχει ένας μοναδικός λόγος όπου η σύνθεσις αποκτά εξαιρετική ιδιότητα: η Χρυσή Τομή $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$.

Θυμάσαι από τον Η′ Ορισμό ότι $\varphi = 1 + 1/\varphi$. Ας το δούμε τώρα μέσα από τον ΙΔ′ Ορισμό:

Αν ο αρχικός λόγος είναι φ:1, τότε η σύνθεσίς του είναι: $(\varphi+1):1 = \varphi^2:1$

Γιατί; Γιατί $\varphi+1 = \varphi^2$ — αυτή είναι η θεμελιώδης ιδιότητα της Χρυσής Τομής. Η σύνθεσις του λόγου φ:1 δεν απλώς προσθέτει μία μονάδα — παράγει το τετράγωνο του αρχικού λόγου. Το αποτέλεσμα έχει την ίδια δομή με την αρχή αλλά σε υψηλότερη δύναμη.

Η Χρυσή Τομή είναι ο μοναδικός λόγος όπου σύνθεσις = τετραγωνισμός. Γι' αυτό είναι η τελειότερη περίπτωση του ΙΔ′ Ορισμού: η προσθήκη της μονάδας δεν είναι απλή αύξηση αλλά αυτο-αναφορική ανάπτυξη — το αποτέλεσμα φέρει μέσα του ολόκληρη την αρχική δομή, ανυψωμένη.

— Ο ΔΙΠΛΟΣ ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ Β —

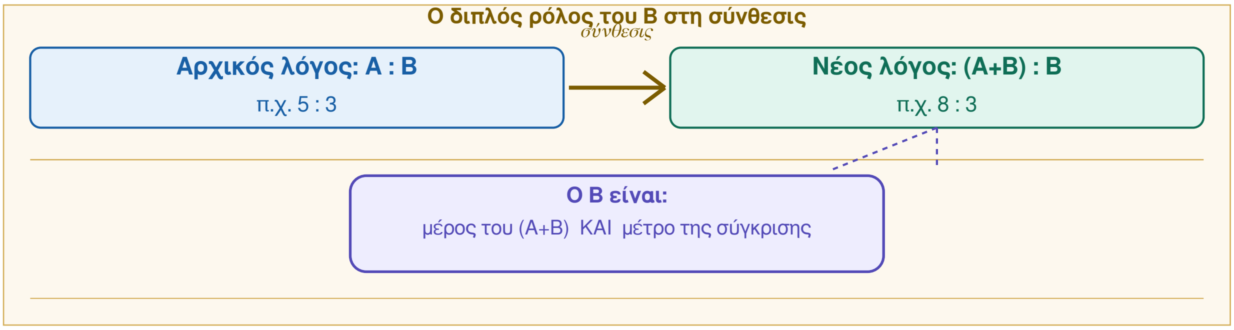
Στη σύνθεσις ο Β παίζει διπλό ρόλο: είναι μέρος του νέου συνόλου (Α+Β) και ταυτόχρονα μέτρο ως προς το οποίο το σύνολο συγκρίνεται. Βρίσκεται και στις δύο πλευρές του λόγου.

Αυτό θυμίζει τον μέσο ανάλογο του Η′ Ορισμού — τον όρο που ήταν ταυτόχρονα επόμενο του ενός λόγου και ηγούμενο του άλλου. Αλλά εδώ η διπλή παρουσία είναι διαφορετική: στον Η′ ο μέσος ανάλογος ήταν δεσμός μεταξύ δύο λόγων, στον ΙΔ′ ο Β είναι μέτρο εντός ενός λόγου. Εκεί δημιουργούσε συνέχεια μεταξύ λόγων — εδώ δημιουργεί εσωτερικό μέτρο εντός της ίδιας σχέσης.

— ΟΝΤΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο κόσμος δεν μετριέται ως προς κάτι εξωτερικό — μετριέται ως προς τα στοιχεία που τον συγκροτούν.

Όταν ο Δημιουργός στον Τίμαιο συνθέτει τον κόσμο από Πυρ, Αέρα, Ύδωρ και Γη, η αρμονία του κόσμου δεν μετριέται με κάποια εξωτερική κλίμακα. Μετριέται ως προς τις αναλογίες μεταξύ των στοιχείων που τον αποτελούν. Τα στοιχεία είναι ταυτόχρονα τα υλικά της δημιουργίας και το μέτρο της. Ο κόσμος κρίνεται από τα μέσα του.



Ο Β παίζει διπλό ρόλο: μέρος του νέου συνόλου και μέτρο της σύγκρισης — ο δεσμός ανήκει και στις δύο πλευρές.

ΙΕ΄ ΟΡΙΣΜΟΣ — ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΛΟΓΟΥ

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Διαίρεσις λόγου είναι η λήψη της υπεροχής με την οποία το ηγούμενο υπερέχει του επομένου, ως προς αυτό το ίδιο το επόμενο.

Αν Α:Β (με Α > Β), τότε διαίρεσις = (Α–Β):Β

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Διαίρεσις» — από το «διά» + «αἱρέω»: χωρίζω, διαχωρίζω, αφαιρώ. Δεν είναι απλή αριθμητική αφαίρεση — είναι αποκάλυψη αυτού που μένει όταν αφαιρέσεις ένα μέρος από το όλον.

«Ὑπεροχή» — υπεροχή, περίσσευμα. Είναι η διαφορά Α–Β — αλλά ο Ευκλείδης δεν λέει «διαφορά». Λέει «υπεροχή» — αυτό που το ηγούμενο έχει παραπάνω από το επόμενο. Η λέξη υπονοεί ότι το ηγούμενο ξεπερνάει το επόμενο, και αυτό το ξεπέρασμα είναι που μετριέται.

— Ο ΑΡΧΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ ΜΕΙΟΝ ΜΙΑ ΜΟΝΑΔΑ —

Αντίστοιχα με τον ΙΔ′ Ορισμό:

$$(A-B):B = A/B - B/B = A/B - 1$$

Η διαίρεσις είναι ο αρχικός λόγος μείον μία μονάδα. Είναι το ακριβές αντίστροφο της σύνθεσης: εκεί προσθέτεις μία μονάδα, εδώ αφαιρείς μία μονάδα. Και η μονάδα είναι το μέτρο με το οποίο γίνεται κάθε βήμα.

— Η ΚΥΚΛΙΚΗ ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ —

Εδώ αποκαλύπτεται κάτι θεμελιακό:

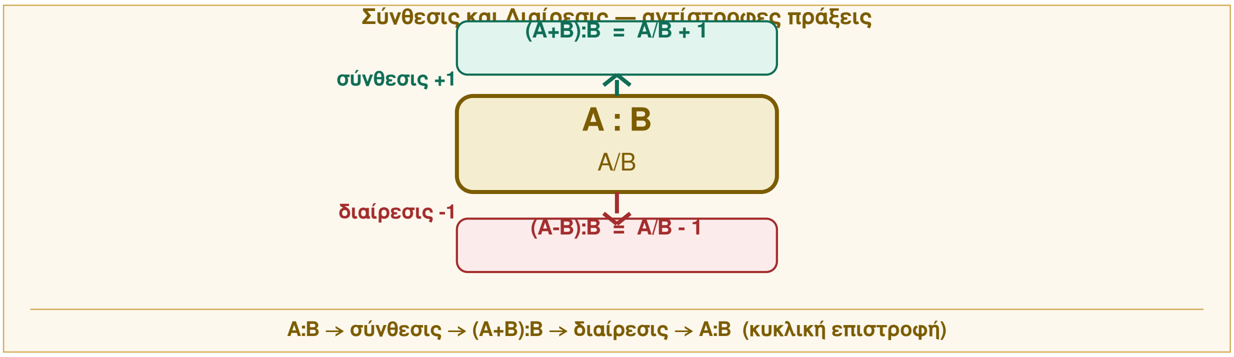
Α:Β → σύνθεσις → (Α+Β):Β → διαίρεσις → Α:Β

Επέστρεψες ακριβώς εκεί που ξεκίνησες. Η σύνθεσις και η διαίρεσις δεν είναι απλώς συμμετρικές — είναι αντίστροφες πράξεις. Η μία αναιρεί την άλλη με μαθηματική ακρίβεια.

Αυτό σημαίνει ότι ο αρχικός λόγος δεν χάνεται ποτέ. Όσες πράξεις κι αν εκτελέσεις — σύνθεση, διαίρεση — ο δρόμος της επιστροφής υπάρχει πάντα. Είναι μαθηματική απόδειξη μιας πλατωνικής αρχής: η Πρόοδος και η Επιστροφή είναι η ίδια διαδρομή δύο φορές — μία προς τα εμπρός και μία προς τα πίσω.

— Η ΥΠΕΡΟΧΗ ΩΣ ΑΠΟΚΑΛΥΨΗ —

Η διαίρεσις δεν ρωτάει «πόσο μεγάλο είναι το Α». Ρωτάει: «τι έχει παραπάνω το Α από το Β; Και αυτό το παραπάνω — η υπεροχή — πόσες φορές χωράει στον Β;» Αποκαλύπτει αυτό που δεν φαίνεται στην αρχική σχέση: το πλεόνασμα του ηγουμένου μετρημένο με τον ίδιο τον επόμενο.



Σύνθεσις (+1) και Διαίρεσις (−1) γύρω από τον αρχικό λόγο — κυκλική επιστροφή με μαθηματική αναγκαιότητα.

ΙΣΤ΄ ΟΡΙΣΜΟΣ — ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ ΛΟΓΟΥ

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Αναστροφή λόγου είναι η λήψη του ηγουμένου ως προς την υπεροχή με την οποία το ηγούμενο υπερέχει του επομένου.

Αν Α:Β (με Α > Β), τότε αναστροφή = Α:(Α–Β)

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Ἀναστροφή» — από το «ἀνά» + «στρέφω»: στρέφομαι πίσω, στρέφομαι προς τον εαυτό μου. Δεν είναι αντιστροφή — η αντιστροφή (ανάπαλιν) αλλάζει κατεύθυνση. Η αναστροφή στρέφεται εσωτερικά — κοιτάει το ηγούμενο ως προς αυτό που το ίδιο αφήνει πίσω του όταν μειωθεί κατά το επόμενο.

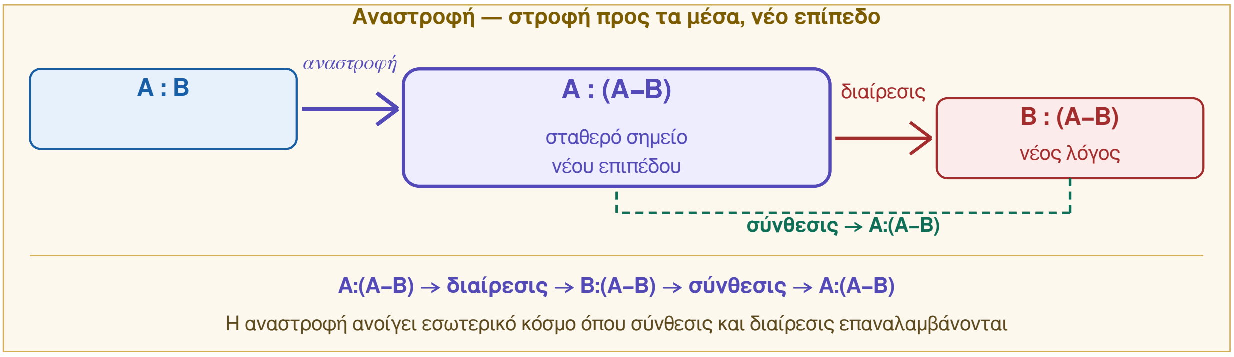
Η θεμελιακή διαφορά: στον ΙΔ΄ και ΙΕ΄ το μέτρο ήταν ο Β — δεδομένος. Στον ΙΣΤ΄ το μέτρο είναι η υπεροχή Α–Β — κάτι που δεν υπήρχε ως ανεξάρτητος όρος στην αρχή. Η αναστροφή δημιουργεί το μέτρο της — δεν το δανείζεται από αλλού.

— Η ΑΛΥΣΙΔΑ ΤΗΣ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗΣ —

Η αναστροφή δεν ανεβαίνει ούτε κατεβαίνει — ανοίγει ένα νέο επίπεδο. Και μέσα σε αυτό το νέο επίπεδο η σύνθεσις και η διαίρεσις επαναλαμβάνονται:

A:B → αναστροφή → A:(A−B) → διαίρεσις → B:(A−B) → σύνθεσις → A:(A−B)

Ο λόγος A:(A−B) είναι σταθερό σημείο του νέου επιπέδου. Και αναδύεται ένας λόγος που δεν υπήρχε πριν: το B:(A−B) — ο λόγος του επομένου προς την υπεροχή. Εμφανίζεται μόνο όταν εφαρμόσεις αναστροφή και μετά διαίρεση. Η αναστροφή είναι η πύλη που τον αποκαλύπτει.



Η αναστροφή ανοίγει εσωτερικό κόσμο όπου σύνθεσις και διαίρεσις επαναλαμβάνουν το παιχνίδι τους με νέους όρους.

— ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Η αναστροφή είναι η πράξη της ἐπιστροφῆς πρὸς ἑαυτόν — της στροφής της ψυχής προς τον εαυτό της που ο Πλωτίνος περιγράφει ως προϋπόθεση κάθε αληθινής γνώσης. Δεν κινείσαι προς τα έξω ούτε επιστρέφεις απλώς — στρέφεσαι εσωτερικά, κοιτάς το ηγούμενο ως προς αυτό που ο ίδιος αφήνει πίσω του. Αυτή είναι η κίνηση της αυτογνωσίας.

??? Η ΤΡΙΑΔΑ ΙΔ´-ΙΕ´-ΙΣΤ´ ΩΣ ΕΝΙΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ???

Οι τρεις ορισμοί δεν είναι τρεις άσχετες πράξεις. Είναι η πλήρης κίνηση του νου γύρω από μια σχέση.

Το πρώτο επίπεδο — η συμμετρία

Σύνθεσις και διαίρεσις είναι αντίστροφες: η μία προσθέτει μία μονάδα, η άλλη αφαιρεί μία μονάδα. Ο αρχικός λόγος A:B είναι το αμετάβλητο κέντρο — πάντα εκεί, να περιμένει την επιστροφή.

Το δεύτερο επίπεδο — η αναστροφή ως πύλη

Η αναστροφή δεν ανεβαίνει ούτε κατεβαίνει — ανοίγει εσωτερικό επίπεδο. Και μέσα σε αυτό το επίπεδο η σύνθεσις και η διαίρεσις επαναλαμβάνονται με νέους όρους, αποκαλύπτοντας λόγους που δεν ήταν ορατοί από την αρχή.

Το τρίτο επίπεδο — η αναλογία με τον Πλωτίνο

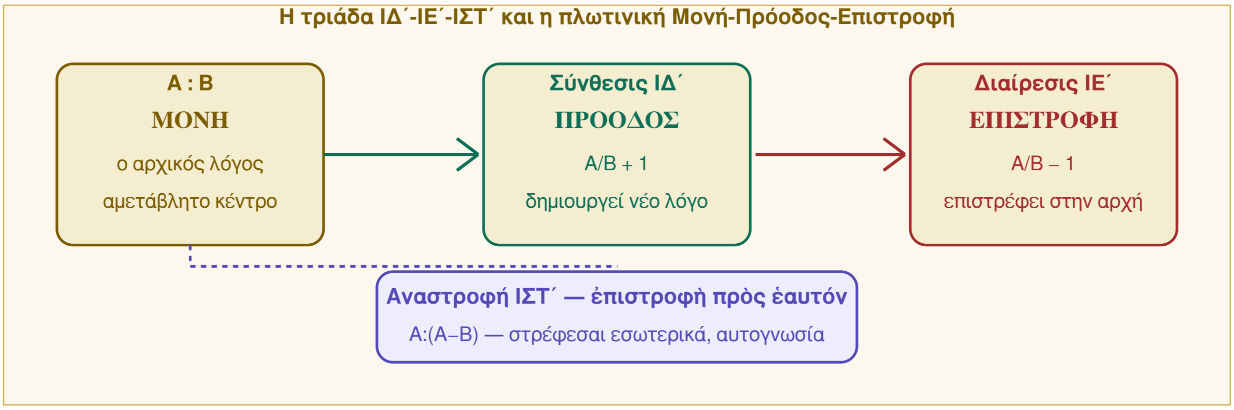
Ο Πλωτίνος λέει ότι κάθε ον έχει τρεις κινήσεις: Μονή — Πρόοδος — Επιστροφή.

Ο αρχικός λόγος Α:Β — η Μονή. Μένει στον εαυτό του, αμετάβλητο κέντρο.

Σύνθεσις (ΙΔ′) — η Πρόοδος. Δημιουργείς κάτι μεγαλύτερο, ανεβαίνεις κατά μία μονάδα, παράγεις νέο λόγο.

Διαίρεσις (ΙΕ′) — η Επιστροφή. Αφαιρείς αυτό που προστέθηκε, κατεβαίνεις κατά μία μονάδα, βρίσκεις τον αρχικό λόγο.

Αναστροφή (ΙΣΤ′) — η ἐπιστροφὴ πρὸς ἑαυτόν. Δεν κινείσαι προς τα έξω ούτε επιστρέφεις απλώς — στρέφεσαι εσωτερικά, κοιτάς το ηγούμενο ως προς αυτό που ο ίδιος αφήνει πίσω. Η κίνηση της αυτογνωσίας.



Η τριάδα ΙΔ´-ΙΕ´-ΙΣΤ´ αντιστοιχεί στη Μονή-Πρόοδο-Επιστροφή του Πλωτίνου — τρεις κινήσεις γύρω από έναν λόγο.

Ο Ευκλείδης δεν το λέει ρητά. Αλλά αυτοί οι τρεις ορισμοί μαζί αποτελούν ένα πλήρες σύστημα κινήσεων γύρω από έναν λόγο. Και το σύστημα αυτό έχει μια βαθιά ιδιότητα: ο αρχικός λόγος δεν χάνεται ποτέ. Όπου κι αν πας — πάνω, κάτω, μέσα — ο δρόμος της επιστροφής υπάρχει πάντα.

Και η αναστροφή σου δείχνει ότι υπάρχει και ένα βαθύτερο επίπεδο — ένας εσωτερικός κόσμος του λόγου που αποκαλύπτεται μόνο όταν στραφείς προς τα μέσα. Αυτό είναι η μαθηματική θεμελίωση της πλατωνικής πεποίθησης: η αλήθεια δεν βρίσκεται έξω — βρίσκεται μέσα, στη στροφή προς τον εαυτό.

ΙΖʹ Ορισμός

Δι᾽ Ἴσου Λόγος

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Δι᾽ ἴσου λόγος υπάρχει όταν, έχοντας πλείονα μεγέθη και άλλα ίσου πλήθους, λαμβανομένων ανά δύο στον ίδιο λόγο, ισχύει: όπως το πρώτο προς το έσχατο στην πρώτη σειρά, έτσι το πρώτο προς το έσχατο στη δεύτερη σειρά. Ή αλλιώς: λήψη των άκρων με εξαίρεση των μέσων.

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Δι᾽ ἴσου» — δια του ίσου, μέσω ίσων λόγων. Στα λατινικά ex aequali. Διασχίζεις την αναλογία βήμα-βήμα για να φτάσεις από το πρώτο στο τελευταίο.

«Σύνδυο λαμβανομένων» — λαμβανομένων ανά δύο. Κάθε φορά συγκρίνεις δύο διαδοχικούς όρους — η σύγκριση γίνεται βήμα-βήμα.

«Λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων» — η συνοπτική διατύπωση: λήψη των άκρων με αφαίρεση των μέσων. Ο Ευκλείδης δίνει δύο ορισμούς για το ίδιο πράγμα — έναν αναλυτικό και έναν συνοπτικό. Αυτό είναι μοναδικό στο Βιβλίο V.

— ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

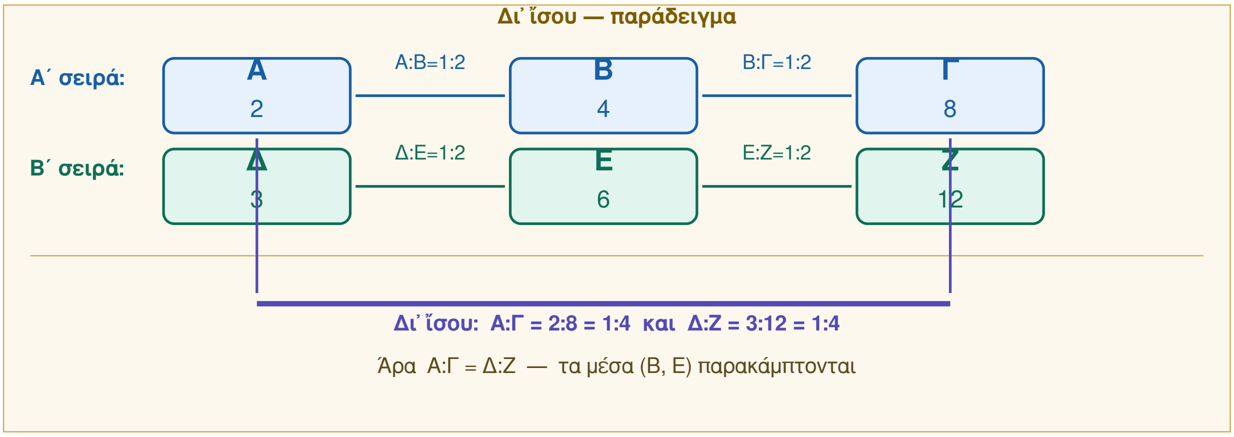
Έχουμε δύο σειρές μεγεθών ίσου πλήθους:

Πρώτη σειρά: Α, Β, Γ | Δεύτερη σειρά: Δ, Ε, Ζ

Προϋποθέσεις: Α:Β = Δ:Ε και Β:Γ = Ε:Ζ

Συμπέρασμα (δι᾽ ἴσου): Α:Γ = Δ:Ζ

Τα μεσαία μεγέθη Β και Ε παρακάμπτονται. Συγκρίνονται μόνο τα άκρα — το πρώτο και το τελευταίο κάθε σειράς. Τα μέσα όμως δεν αγνοούνται: είναι αυτά που δημιούργησαν τη σχέση που τώρα επιτρέπει την παράκαμψη.



Α΄ σειρά: 2, 4, 8 (λόγος 1:2 ανά ζεύγος). Β΄ σειρά: 3, 6, 12 (λόγος 1:2 ανά ζεύγος). Δι᾽ ἴσου: 2:8 = 3:12 = 1:4.

— ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο ΙΖ′ Ορισμός εισάγει μια απλή αλλά σημαντική ιδέα: όταν δύο σειρές μεγεθών ακολουθούν τους ίδιους λόγους βήμα-βήμα, τότε τα άκρα τους σχετίζονται με τον ίδιο τρόπο ανεξάρτητα από τα ενδιάμεσα.

Αυτό είναι η μαθηματική θεμελίωση μιας αρχής που χρησιμοποιούμε καθημερινά: αν το Α σχετίζεται με το Β και το Β με το Γ με τον ίδιο τρόπο, τότε το Α σχετίζεται με το Γ. Δεν χρειάζεται να γνωρίζεις το Β για να καταλάβεις τη σχέση Α και Γ.

Στη φιλοσοφία αυτό σημαίνει: μια αλυσίδα αιτίων μπορεί να «συντμηθεί» — μπορείς να δεις τη σχέση αρχής και αποτελέσματος χωρίς να διανύσεις κάθε ενδιάμεσο βήμα. Τα ενδιάμεσα υπάρχουν και είναι απαραίτητα για να δημιουργηθεί η αλυσίδα — αλλά η σχέση των άκρων μπορεί να γίνει αντιληπτή και άμεσα.

Ο Πλάτων στην Πολιτεία (508e) χρησιμοποιεί αυτή τη λογική όταν παρομοιάζει το Αγαθό με τον Ήλιο:

> *«…ὅτιπερ αὐτὸ ἐν τῷ νοητῷ τόπῳ πρός τε νοῦν καὶ τὰ νοούμενα, τοῦτο τὸν ἥλιον ἐν τῷ ὁρατῷ πρός τε ὄψιν καὶ τὰ ὁρώμενα.»*

> «…ό,τι είναι [το Αγαθό] στον νοητό τόπο ως προς τον νου και τα νοούμενα, αυτό είναι ο Ήλιος στον ορατό τόπο ως προς την όραση και τα ορώμενα.»

Εδώ ο Πλάτων εφαρμόζει μια αναλογία μεταξύ νοητού και αισθητού κόσμου — η δομή είναι η ίδια και στους δύο. Αυτό είναι μια εφαρμογή της λογικής του «δι᾽ ἴσου»: η σχέση πηγής και αποτελέσματος είναι η ίδια σε δύο παράλληλες σειρές. Πόσο όμως ακριβώς αντιστοιχεί ο ΙΖ′ Ορισμός σε αυτή την πλατωνική αναλογία είναι ένα ερώτημα που απαιτεί περαιτέρω φιλοσοφική μελέτη.

— ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟΥΣ ΟΡΙΣΜΟΥΣ —

Ο ΙΖ′ Ορισμός προϋποθέτει τον ΙΑ′ (ομόλογα μεγέθη): για να παρακαμφθούν τα μέσα πρέπει τα άκρα να είναι ομόλογα — να ανήκουν στην ίδια θέση (ηγούμενα ή επόμενα) στις

αντίστοιχες σειρές.

Είναι επίσης η μαθηματική θεμελίωση της μεταβατικής ιδιότητας: αν Α:Β = Β:Γ, τότε Α:Γ = $(Α:Β)^2$ — τον Θ′ Ορισμό που αναλύσαμε νωρίτερα. Ο ΙΖ′ Ορισμός γενικεύει αυτή την ιδέα σε δύο παράλληλες σειρές.

ΙΗ′ Ορισμός

Τεταραγμένη Ἀναλογία

— ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ —

«Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.»

— ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ —

Τεταραγμένη αναλογία υπάρχει όταν, ενώ υπάρχουν τρία μεγέθη και άλλα τόσα ίσου πλήθους, ισχύει: όπως στην πρώτη ομάδα το ηγούμενο προς το επόμενο, έτσι στη δεύτερη ομάδα το ηγούμενο προς το επόμενο· και όπως στην πρώτη ομάδα το επόμενο προς κάποιο άλλο, έτσι στη δεύτερη ομάδα κάποιο άλλο προς το ηγούμενο.

— ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

«Τεταραγμένη» — από το ρήμα «ταράσσω»: ανακατεύω, εναλλάσσω τη σειρά. Δεν είναι αξιολογικός όρος — δεν σημαίνει «κακή» ή «λανθασμένη» αναλογία. Είναι τεχνικός όρος που δηλώνει ότι η σειρά των λόγων έχει εναλλαγεί: οι όροι δεν αντιστοιχούν παράλληλα αλλά χιαστί.

Σε αντίθεση με τον ΙΑ′ Ορισμό (ομόλογα μεγέθη) όπου τα ηγούμενα αντιστοιχούν στα ηγούμενα και τα επόμενα στα επόμενα, στην τεταραγμένη αναλογία η αντιστοιχία είναι σταυρωτή: το ηγούμενο της πρώτης σειράς αντιστοιχεί στο επόμενο της δεύτερης και αντιστρόφως. Αυτή είναι η «ταραχή» — η εναλλαγή της θέσης, όχι αταξία.

— ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Έστω δύο ομάδες μεγεθών ίσου πλήθους:

Ομάδα Α: Α, Β, Γ | Ομάδα Β: Δ, Ε, Ζ

Η αναλογία είναι τεταραγμένη όταν ισχύουν χιαστί:

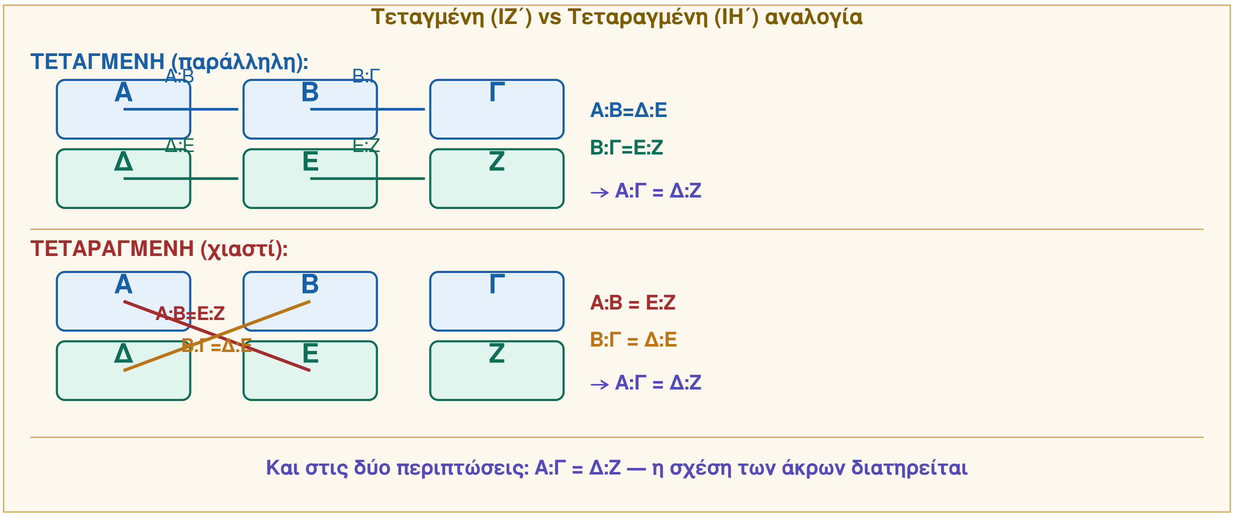
Α:Β = Ε:Ζ (όχι Δ:Ε όπως στην τεταγμένη)

και Β:Γ = Δ:Ε

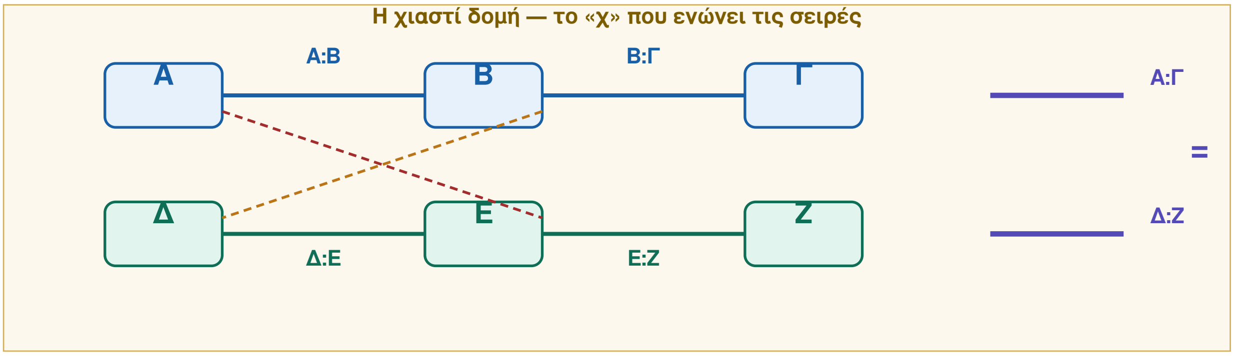
Παρά την εναλλαγή, το αποτέλεσμα παραμένει (αποδεικνύεται στην Πρόταση 23 του Βιβλίου V):

Α:Γ = Δ:Ζ

Αριθμητικό παράδειγμα: Α=2, Β=4, Γ=8, Δ=3, Ε=6, Ζ=12. Ελέγχουμε: Α:Β = 2:4 = 1:2 και Ε:Ζ = 6:12 = 1:2. ✓ Β:Γ = 4:8 = 1:2 και Δ:Ε = 3:6 = 1:2. ✓ Αποτέλεσμα: Α:Γ = 2:8 = 1:4 και Δ:Ζ = 3:12 = 1:4. ✓



Στην τεταγμένη αναλογία οι λόγοι είναι παράλληλοι. Στην τεταραγμένη είναι χιαστί. Και στις δύο: Α:Γ = Δ:Ζ.



Η χιαστί δομή: τα βέλη διασταυρώνονται ενώνοντας ηγούμενα της μιας σειράς με επόμενα της άλλης.

— ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ —

Ο ΙΗ′ Ορισμός είναι ο τελευταίος του Βιβλίου V — και κλείνει τη σειρά με μια εκπληκτική παρατήρηση: η αλήθεια της σχέσης των άκρων δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία συνδέονται τα μέσα.

① Η διαλεκτική τάξης και φαινομενικής αταξίας

Στην τεταραγμένη αναλογία η σειρά φαίνεται «ανακατεμένη» — τα ηγούμενα δεν αντιστοιχούν στα ηγούμενα. Και όμως το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με την τεταγμένη αναλογία. Η «ταραχή» είναι επιφανειακή — η βαθύτερη αναλογία παραμένει αλώβητη.

② Η υποκείμενη ενότητα του λόγου

Ο ΙΗ′ Ορισμός δείχνει ότι η αλήθεια μιας σχέσης δεν εξαρτάται από τη γραμμική σειρά αλλά από την εσωτερική ποιότητα των μερών. Ακόμα και όταν τα ενδιάμεσα βήματα δεν

ακολουθούν την αναμενόμενη τάξη, η σχέση πρώτου και τελευταίου διατηρείται.

③ Σύνδεση με τον ΙΑ′ Ορισμό

Ο ΙΑ′ Ορισμός (ομόλογα μεγέθη) όριζε ότι στην κανονική αναλογία τα ηγούμενα αντιστοιχούν στα ηγούμενα και τα επόμενα στα επόμενα. Ο ΙΗ′ Ορισμός δείχνει ότι ακόμα και όταν αυτή η αντιστοιχία εναλλαγεί χιαστί, το βασικό αποτέλεσμα — η σχέση των άκρων — παραμένει.

④ Σύνδεση με τον ΙΖ′ Ορισμό

Όπως στον «δι᾽ ἴσου» λόγο (ΙΖ′), έτσι και εδώ τα άκρα συνδέονται ανεξάρτητα από τα μέσα. Η διαφορά είναι ο τρόπος σύνδεσης: στον ΙΖ′ παράλληλος, στον ΙΗ′ χιαστί. Το ίδιο συμπέρασμα, διαφορετική διαδρομή.

Σύγκριση ΙΖ´ και ΙΗ´ Ορισμού

Χαρακτηριστικό	Τεταγμένη (ΙΖ´)	Τεταραγμένη (ΙΗ´)
Δομή λόγων	Παράλληλη	Χιαστί / Σταυρωτή
Σχέση ομόλογων	Α:Β = Δ:Ε	Α:Β = Ε:Ζ
Αποτέλεσμα	Α:Γ = Δ:Ζ	Α:Γ = Δ:Ζ

Ο ΙΖ´ και ΙΗ´ Ορισμός: δύο διαφορετικές δομές που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

— ΚΑΤΑΚΛΕΙΣ —

Ο ΙΗ′ Ορισμός κλείνει το Βιβλίο V με έναν τρόπο που αποκαλύπτει τη βαθύτερη αρχή ολόκληρης της σειράς: η αναλογία δεν είναι ευαίσθητη στις αλλαγές σειράς των μέσων. Τα άκρα «κρατούν» — ανεξάρτητα από το πώς τα μέσα τα συνδέουν.

Αυτό είναι η μαθηματική έκφραση μιας απλής αλλά βαθιάς ιδέας: η ουσία μιας σχέσης δεν αλλάζει από τον τρόπο που την προσεγγίζεις — αρκεί οι λόγοι να παραμένουν ίσοι.